Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1921-1922)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Société mathématique suisse.

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Société mathématique suisse.

Réunion de Bienne, 23 avril 1922.

La Société mathématique suisse a tenu une réunion de printemps à Bienne, le dimanche 23 avril 1922, sous la présidence de M. G. DUMAS, professeur à l'Université de Lausanne. Sur l'invitation du comité, MM. les professeurs W. BLASCHKE et HECKE, de l'Université de Hambourg, et M. PLANCHEREL, de l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, ont présenté les conférences dont on trouvera ci-après un résumé. En outre, des communications furent présentées par MM. E. GUILLAUME, G. POLYA et D. MIRIMANOFF.

CONFÉRENCES.

1. *Conférence* de M. E. HECKE (Hambourg). — *Arithmétique et Théorie des fonctions.* — Les plus grands progrès de l'arithmétique ont été effectués lorsqu'on a appliqué aux questions qui y ressortissent le moyen puissant qu'offre l'analyse des variables continues. Il suffit de se rappeler le nom du fondateur de la théorie analytique des nombres : Dirichlet, ainsi que ceux de Gauss, Abel, Kronecker, Kummer, qui firent voir l'importance de la fonction exponentielle et de la fonction elliptique modulaire pour l'arithmétique supérieure.

Une question importante se pose : *Quel secours doit-on attendre de l'analyse* dans l'édification complète de la théorie des corps de nombres algébriques de degrés supérieurs, théorie que l'on doit à Kummer, Dedekind et Hilbert ? *Quels problèmes de théories des fonctions ces questions arithmétiques soulèvent-elles* ?

Le conférencier esquisse les méthodes et les résultats en rapport avec ces matières.

Dans le corps quadratique réel $K(\sqrt{3})$, les « nombres entiers » sont les nombres $\mu = m + n\sqrt{3}$ (m, n, étant rationnels entiers) pour lesquels il est aisé de définir la divisibilité. Les nombres les plus importants du corps sont les diviseurs du nombre 1, ce sont par suite des diviseurs de tous les nombres entiers. C'est précisément le cas du nombre $\varepsilon = 2 + \sqrt{3}$ « l'unité fondamentale » $\left(\frac{1}{\varepsilon} = 2 - \sqrt{3}\right)$ et des nombres $\pm \varepsilon^n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ que l'on désigne tous sous le nom d'« unités »; grâce à ces nombres, il est possible de décomposer chaque nombre entier μ en un produit de facteurs entiers, par exemple $\mu = \varepsilon . \frac{\mu}{\varepsilon}$; ces décompositions en facteurs sont peu intéressantes. Les nombres premiers dans $K(\sqrt{3})$ sont des nombres entiers du corps qui ne peuvent être décomposés en un produit de facteurs

entiers — les facteurs unités étant exclus. On peut alors démontrer que chaque nombre entier du corps est décomposable d'une seule manière en un produit de facteurs premiers, pourvu que l'on fasse abstraction des facteurs unités.

Dirichlet a déjà reconnu la signification de la fonction:

$$\zeta_k(s) = \sum_{(\mu)}{}' \frac{1}{|N(\mu)|^s} \qquad (N(\mu) = \mu\mu' = m^2 - 3n^2)$$

qui est, par rapport au corps $K(\sqrt{3})$, l'analogue de ce qu'est la fonction $\zeta(s)$ de Riemann pour le corps naturel. Dans l'expression de $\zeta_k(s)$, la sommation porte sur toutes les valeurs entières $\mu \neq 0$, du corps qui ne sont pas associées, c'est-à-dire telles que deux d'entre elles ne diffèrent pas par un facteur unité. Cette fonction de la variable s, par suite de l'unicité de la décomposition d'un entier, est représentable en un produit infini :

$$\zeta_k(s) = \prod_{(\pi)} \frac{1}{1 - \frac{1}{|N(\pi)|^s}},$$

où π passe par tous les nombres premiers non associés. Les propriétés de la fonction analytique $\zeta_k(s)$ jouent un grand rôle dans la recherche des nombres premiers du corps. L'un des premiers résultats relatifs à ce point est le théorème de Dirichlet, qui assure qu'il existe une infinité de nombres premiers π.

Considérons maintenant l'ensemble des nombres $m + n\sqrt{3}$ comme une multiplicité à deux dimensions; les recherches récentes ont eu pour but l'étude de certaines fonctions des deux variables qu'on peut attacher au corps. Voici comment il nous paraît que le pas essentiel peut être effectué dans cette direction : Par analogie avec les recherches classiques, formons la forme quadratique définie qui correspond au corps $K(\sqrt{3})$, soit $A\mu^2 + A'\mu'^2$, où μ et μ' sont conjugués et A et A' positifs; puis formons pour $s > 1$ la série convergente

$$\sum_{\mu} \frac{1}{(A\mu^2 + A'\mu'^2)^s}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de μ, à l'exclusion de $\mu = 0$. En multipliant les dénominateurs par un nombre approprié C^s on peut s'arranger pour que $AA' = 1$; posons alors $A = e^x$, $A' = e^{-x}$, nous obtenons alors la fonction

$$Z(s\,;\,x) = \sum_{\mu} \frac{1}{(e^x\mu^2 + e^{-x}\mu'^2)^s}$$

des deux variables s et x. De telles fonctions de s ne sont pas inconnues en analyse, mais ce qui fait leur importance pour la théorie arithmétique du corps K, c'est leur périodicité en x. En effet, puisque μ parcourt toute la suite des entiers du corps, $\varepsilon\mu$ parcourt aussi toute cette suite, par conséquent :

$$Z(s\,;\ x + 2\log\varepsilon) = Z(s\,;\ x)\ .$$

On peut donc développer Z en série de Fourier

$$Z(s\,;\ x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n\, e^{\frac{\pi i n}{\log\varepsilon} x}\ .$$

Il se trouve précisément que c_0 (à un facteur banal près) est $\zeta_k(s)$ et que les autres coefficients c_n sont liés simplement aux fonctions :

$$\zeta(s\,,\ \lambda_n) = \sum_{(\mu)} \frac{\lambda_n(\mu)}{|\,N(\mu)\,|^s} = \prod_{(\pi)} \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda_n(\pi)}{|\,N(\pi)\,|^s}} \qquad (n = 0\,,\ 1\,,\ \ldots)$$

où

$$\lambda_n(\mu) = e^{\frac{\pi i n}{\log\varepsilon}\log\left|\frac{\mu}{\mu'}\right|}\ ;$$

on voit que

$$\lambda_n(\varepsilon\mu) = \lambda_n(\mu)\ ; \qquad \lambda_n(\alpha\beta) = \lambda_n(\alpha)\,.\,\lambda_n(\beta)\ .$$

Cette suite infinie de fonctions est en quelque manière un équivalent de la fonction de deux variables $Z(s; x)$. Par suite de l'unicité de la décomposition d'un entier du corps en produit de facteurs premiers, on tire des faits précédents, le résultat suivant: *L'expression* $m^2 - 3\,n^2$ *représente une infinité de nombres premiers, même si l'on ne considère que les nombres* m, n *situés dans le plan des* m, n *à l'intérieur d'un angle de sommet* 0(0. 0) *et de valeur aussi petite que l'on veut.*

La représentation intégrale bien connue de $\Gamma(s)$ permet de passer à une autre fonction de 2 variables, qui n'est pas autre chose qu'une série théta à deux variables:

$$\vartheta(\tau\,,\ \tau') = \sum_{\mu} e^{\pi i(\tau\mu^2 + \tau'\mu'^2)}\ ,$$

la sommation étant étendue à tous les nombres entiers du corps; τ et τ' sont des variables complexes dont la partie imaginaire a un

coefficient positif. La théorie des fonctions théta permet de déduire les propriétés d'invariance:

$$\vartheta(\varepsilon^2\tau, \varepsilon'^2\tau') = \vartheta(\tau, \tau'), \qquad \vartheta(\tau + \alpha, \tau' + \alpha') = \vartheta(\tau, \tau') \qquad (1)$$

(pour tout entier α)

et

$$\vartheta^8\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta'}, \frac{\alpha'\tau' + \rho'}{\gamma'\tau' + \delta'}\right) = (\gamma\tau + \delta)^4 (\gamma'\tau' + \delta')^4 \vartheta^8(\tau, \tau')$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre entiers quelconques du corps, assujettis à satisfaire à la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, et à certaines congruences relatives au module 4.

Avec l'aide d'une formule particulière de l'espèce précédente, on peut démontrer que $Z(s; x)$ est prolongeable et l'on en tire une équation fonctionnelle pour cette même $Z(x; s)$; par suite, on en déduit des résultats analogues pour toutes les $\zeta(s, \lambda_n)$. Celles-ci sont, après multiplication par $(s - 1)$, des fonctions transcendantes entières de s.

Grâce à ces fonctions théta, nous avons réussi à atteindre le domaine des *fonctions modulaires à deux variables*. On en déduit des conclusions qui peuvent être considérées comme une généralisation de la théorie de la division du cercle, et de celle de la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Si l'on n'a égard qu'à l'invariance suivant les équations (1), on arrive, par exemple, aux séries suivantes:

$$\varphi(\tau, \tau') = \sum_{\mu > 0} e^{\pi i(\tau\mu + \tau'\mu')} N(\mu)^{k-1}$$

k étant un nombre fixe $\geqq 1$; la sommation ne porte que sur les entiers totalement positifs du corps c'est-à-dire sur ceux pour lesquels on a, à la fois $\mu > 0$, $\mu' > 0$. Ces fonctions représentent la véritable généralisation de la fonction exponentielle pour le cas de plusieurs variables; elles se décomposent en fractions rationnelles, pour ainsi dire:

$$\varphi(\tau, \tau') = A(k) \sum_{\mu} \frac{1}{(\tau\sqrt{3} + \mu)^k (\tau'\sqrt{3} - \mu')^k},$$

$A(k)$ étant indépendant de τ et τ'; la sommation porte sur tous les entiers du corps. Cette équation correspond à la décomposition bien connue de $\cot \pi z$, $\frac{1}{\sin^2 \pi z}$, etc.... Mais alors que ces fonctions sont prolongeables dans tout le plan des z, les pôles et un point singulier essentiel mis à part, on constate que $\varphi(\tau, \tau')$ n'est définie que dans le domaine où τ et τ' ont des coefficients de $\sqrt{-1}$ positifs. Il est possible d'étudier l'allure de φ dans le voisinage des points (singuliers),

frontières de ce domaine. En effet, puisque $\varphi(\varepsilon\tau, \varepsilon'\tau') = \varphi(\tau, \tau')$ on en déduit pour $\varphi(\tau e^x, \tau' e^{-x})$ un développement de Fourier d'après $e^{\frac{2\pi i x}{\log \varepsilon}}$, ce développement met alors en évidence l'allure de φ dans le voisinage de $\tau = \tau' = 0$; φ est infini comme $\frac{\text{const}}{\tau\tau'}$; des développements analogues sont valables dans le voisinage des points $\tau = \frac{\rho}{2\sqrt{3}}$, $\tau' = \frac{-\rho'}{2\sqrt{3}}$ où ρ est un non-entier du corps. Lorsqu'on s'approche de ces points φ ne devient infini que comme $\mathcal{C} \log\left(\tau - \frac{\rho}{2\sqrt{3}}\right)\left(\tau' + \frac{\rho'}{2\sqrt{3}}\right)$; ces facteurs $\mathcal{C}$ sont liés aux *nombres de classes de certains corps supérieurs.*

Pour le traitement analytique de la théorie additive des nombres dans $K(\sqrt{3})$, les fonctions φ forment le moyen le plus commode.

Enfin par une nouvelle sommation, les fonctions φ engendrent les fonctions modulaires et celles-ci donnent lieu à des représentations analogues aux *séries d'Einstein.* Par exemple, sommons par rapport à tous les μ entiers, et plus par rapport aux seuls nombres non associés $\varkappa (\varkappa \neq 0)$, dans l'expression:

$$f(\tau, \tau') = \sum_{(\varkappa)} \frac{1}{(\varkappa\varkappa')^k} + \sum_{(\varkappa)} \sum_{(\mu)} \frac{1}{(\varkappa\tau + \mu)^k (\varkappa'\tau' + \mu')^k}.$$

Pour une valeur entière de $\varkappa$ supérieure à 2, $f(\tau, \tau')$ est absolument convergente et l'on a:

$$f\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \frac{\alpha'\tau' + \beta'}{\gamma'\tau' + \delta'}\right) = (\gamma\tau + \delta)^k (\gamma'\tau' + \delta')^k f(\tau, \tau')$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des entiers du corps de déterminant 1.

2. — Conférence de M. Michel Plancherel (Zurich): *Sur le passage à la limite des équations aux différences aux équations différentielles dans les problèmes aux limites de la physique mathématique.* — Le passage du discret au continu peut se faire en mécanique de deux manières différentes. Ou bien on effectue le passage à la limite sur les équations du mouvement; on est ainsi conduit à des équations différentielles ou aux dérivées partielles que l'on regarde alors comme les équations du mouvement des milieux continus. Ou bien on effectue plus tard ce passage à la limite, à savoir sur les solutions du problème discret. Alors que la première manière est celle que les mathématiciens du XVIIIme et du début du XIXme siècle ont souvent utilisée pour trouver les équations des milieux continus, la seconde a été entre les

mains de physiciens tels que lord Rayleigh un procédé heuristique puissant pour trouver les solutions des problèmes aux limites de la théorie des équations aux dérivées partielles, par exemple, l'existence d'une infinité de vibrations fondamentales et leurs propriétés. Tout naturellement la question se pose: est-ce que ces deux passages à la limite conduisent aux mêmes résultats? En d'autres termes: les petits mouvements d'un système continu autour d'une position d'équilibre peuvent-ils être envisagés comme cas limite des petits mouvements d'un système fini de points matériels?

Formulé mathématiquement dans le cas le plus simple, le problème est le suivant: Soit

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu + \lambda u = f(x) \tag{1}$$

$$u(o) = u(1) = 0 \tag{2}$$

un problème aux limites pour une équation adjointe à elle-même. On suppose $p(x) > 0$. Soit d'autre part

$$\frac{1}{h^2}\,\Delta\,(p_i\,\Delta\,u_{i-1}) + q_i u_i + \lambda u_i = f_i\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{3}$$

$$u_0 = u_n = 0 \tag{4}$$

le problème aux limites pour l'équation aux différences correspondante. Ici

$$h = \frac{1}{n}\ , \quad p_i = p\left(\frac{i}{n}\right), \quad q_i = q\left(\frac{i}{n}\right), \quad f_i = f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Peut-on affirmer que si n tendant vers l'infini et $\frac{i}{n}$ vers x, on a lim $u_i = u(x)$? Peut-on calculer les valeurs et les fonctions fondamentales de l'équation homogène correspondant à (1) comme limites des valeurs et des solutions fondamentales des équations homogènes correspondant à (3) ?

La réponse est affirmative et le but de la conférence était d'esquisser la méthode permettant de donner cette réponse.

Les étapes de la démonstration sont en gros les suivantes:

A. On introduit pour les équations aux différences (3) une expression jouant pour elles le même rôle que la fonction de Green de l'équation (1) et ayant des propriétés analogues.

B. On résoud directement le passage à la limite du problème

$$\frac{1}{h^2}\,\Delta^2 u_i = f_i\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{5}$$

$$u_0 = u_n = 0 \tag{6}$$

au problème
$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \tag{7}$$
$$u(0) = u(1) = 0. \tag{8}$$

C. On ramène ensuite la résolution de l'équation (1) sous les conditions (2) à celle d'une équation intégrale

$$u(x) + \int_0^1 K(\lambda\,;\, x, y)\, u(y)\, dy = F(x) \tag{9}$$

où K dépend de la fonction de Green de (7).

On ramène, d'une manière analogue, la résolution des équations (3) sous les conditions (4) à celle d'un système

$$u_i + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} K_{ik}\, u_k = F_i \tag{10}$$

où K_{ik} dépend de λ et de la fonction de Green de (5). De plus, lorsque n tend vers l'infini et lorsque

$$\frac{i}{n} \longrightarrow x\ , \quad \frac{k}{n} \longrightarrow y$$

$$lim\ K_{ik} = K(\lambda\,;\, x, y)\ , \quad lim\ F_i = F(x)$$

Les résultats classiques de M. Hilbert sur la résolution d'une équation intégrale par le passage à la limite d'un système d'équations algébriques permettent alors de conclure que la solution u_i de (10) converge vers la solution $u(x)$ de (9).

La méthode s'étend au cas des équations aux dérivées partielles. Dans l'étape B l'équation $\Delta u = f$ remplace tout naturellement l'équation (7). Mais le passage à la limite de B n'est plus aussi immédiat et demande une étude assez délicate. De même dans l'étape C, les noyaux qui se présentent ne sont plus bornés, ce qui exige quelques précautions nouvelles.

3. — Conférence de M. Blaschke. — *Chapitres choisis de géométrie différentielle.* — Le Conférencier expose les méthodes et les problèmes de la *géométrie différentielle affine*, c'est-à-dire de l'ensemble des questions qui se formulent au moyen d'expressions invariantes vis-à-vis des transformations affines (projectivités avec conservation du parallélisme). On se rend compte que l'on peut construire une géométrie différentielle invariante vis-à-vis de l'affinité, présentant une analogie remarquable et étroite avec la géométrie différentielle ordinaire; on y peut, par exemple, définir les notions de longueur d'arc, courbure et torsion, puis pour les surfaces courbes, les notions d'aire, de normale à la surface, de lignes de courbure, d'élément d'arc, etc.,

ces notions possédant entre elles les mêmes relations que les notions correspondantes de la géométrie ordinaire.

Comme exemple d'application de ces méthodes l'auteur a démontré les théorèmes suivants:

Chaque ovale a au moins six points possédant une conique osculatrice stationnaire.

Un corps convexe dont toutes les lignes de gravité sont rectilignes est nécessairement un ellipsoïde. Les lignes de gravité sont les courbes, lieux des centres de gravité de sections planes parallèles.

Enfin, l'auteur exposa les plus simples problèmes de variation de la géométrie affine (Intégrales simples et intégrales doubles avec ou sans conditions auxiliaires).

La bibliographie du sujet se compose des mémoires classés sous le titre de « Ueber affine Geometrie, I-XXV dans les *Leipziger Berichte* 1916-1919, XXVI à XXXII dans la *Mathematische Zeitschrift*, 1922, et XXIII à XXXVII dans les *Abhandlungen des math. Seminars der Hamburgischen Universität*, 1 (1922). Le deuxième volume des *Vorlesungen über Differentialgeometrie* du conférencier lui-même (Springer, Berlin, 1923) donnera un exposé synthétique de la question.

Communications.

1. — M. G. Polya (Zurich). — *Prolongement analytique.* — Je dirai qu'une fonction $f(z)$ est de « type normal » dans l'angle $\alpha \leqq \text{arc } z \leqq \beta$ si $f(z)$ est holomorphe dans cet angle et y satisfait à une inégalité de la forme $|f(z)| < A e^{a|z|}$, A et a étant des constantes positives. Pour une fonction entière de type normal l'angle comprend le plan entier. Soit $g(z)$ une fonction entière de type normal. Je désignerai la fonction

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{lg\,|g(re^{i\varphi})|}{r}$$

de la variable réelle φ comme « l'indicateur » de $g(z)$.

1. L'indicateur est la « fonction caractéristique » (= Stützgeradenfunktion) d'une courbe convexe, dite la « figure adjointe » de $g(z)$, qui dans des cas particuliers peut se réduire à un polygone, à un segment de droite ou à un point.

2. Le prolongement analytique des séries

$$\bar{g}(0)\,w^{-1} + \bar{g}'(0)\,w^{-2} + \bar{g}''(0)\,w^{-3} + \ldots = \mathcal{B}(w)$$

$$\bar{g}(0)\,e^{-w} + \bar{g}(1)\,e^{-2w} + \bar{g}(2)\,e^{-3w} + \ldots = \mathcal{C}(w)$$

$$\bar{g}(lg1)\,1^{-1-w} + \bar{g}(lg2)\,2^{-1-w} + \bar{g}(lg2)\,3^{-1-w} + \ldots = \mathcal{D}(w)$$

est holomorphe et uniforme à l'extérieur de la figure adjointe de $g(z)$ mais a un point singulier sur chaque droite qui s'appuie sur cette figure (chaque « Stützgerade »). Dans le cas des séries $\mathcal{B}(w)$ et $\mathcal{D}(w)$

je parle du plan entier des w, $g(z)$ étant une fonction de type normal quelconque, dans le cas de la série $\mathcal{C}(w)$ je ne considère qu'une bande horizontale de largeur 2π à l'intérieur de laquelle la figure adjointe de $g(z)$ est supposée comprise.

3. Une fonction $f(z)$ de type normal dans le demi-plan $\mathcal{R}(z) \geqq 0$ satisfaisant aux conditions

$$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = \ldots = 0$$

$$|f(+ir)| + |f(-ir)| < \exp\left(r\left(\pi - \frac{a}{lg r \cdot lg_2 r \ldots lg_{m-1} r\,(lg_m r)^{1+\varepsilon}}\right)\right)$$

pour r assez grand, a étant une constante positive, s'annulle identiquement si $\varepsilon = 0$, mais peut être $\not\equiv 0$, si $\varepsilon > 0$.

4. Une fonction entière $g(z)$ satisfaisant à une inégalité de la forme $|g(z)| < |z|^a e^{\pi|z|}$ pour $|z|$ suffisamment grand qui s'annulle pour $z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ est $\equiv \mathcal{P}(z) \sin \pi z$, ou $\mathcal{P}(z)$ est un polynome.

5. Soit $N(r)$ le nombre des zéros de $g(z)$ dans le cercle $|z| \leqq r$, $g(z)$ désignant une fonction entière de type normal. On a

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{N(r)}{r} \leqq \frac{U}{2\pi}$$

U désignant le pourtour de la figure adjointe de $g(z)$.

6. Admettons pour simplifier que tous les points singuliers sur le cercle de convergence d'une série entière soient des pôles. On peut affirmer que l'arc entre deux pôles consécutifs quelconques n'excède pas une fraction de la circonférence égale au taux des coefficients différents de zéro de la série en question. Admettons maintenant, que les coefficients sont réels et différents de zéro. Si le point positif du cercle de convergence est un point ordinaire de la série l'arc de régularité qui le contient ne surpasse pas une fraction du cercle égale au taux des variations des coefficients. (Les taux en question sont déterminés par des $\overline{\lim}$.)

On remarquera que ces énoncés apportent quelques précisions à des théorèmes bien connus de MM. Borel, Carlson, Fabry, Lindelöf, Phragmén, Vivanti etc. C'est surtout grâce à la remarque 1 qu'une simplification notable et une coordination naturelle de toutes les questions connexes deviennent possibles.

2. — M. D. Mirimanoff (Genève). — *Sur un problème de la théorie de la mesure.* — Il y a deux ans environ, M. Plancherel a attiré mon attention sur le problème suivant:

Problème. Etant donné deux ensembles linéaires E_x et E_y répartis, le premier sur un segment OA de l'axe Ox et le second sur un segment OB de l'axe Oy, on mène par les points de E_x des droites parallèles à Oy et par les points de E_y des droites parallèles à Ox. Soient E l'ensemble de *tous* les points d'intersection de ces deux familles de

droites et E_λ la projection orthogonale de E sur une droite quelconque $O\lambda$ formant avec Ox un angle ϑ. Quelle est la mesure de E_λ ?

Je donnerai la solution de ce problème pour le cas où les ensembles E_x et E_y appartiennent à la catégorie des ensembles parfaits que M. Denjoy désigne sous le nom d'ensembles présentant le caractère (A) [1] et que j'appelle ensembles parfaits de première espèce.

Soit E un ensemble parfait de 1re espèce construit sur un intervalle (a, b). On sait que son complémentaire se compose d'un ensemble d'intervalles ouverts δ_i que j'appellerai, avec M. W. H. Young, les intervalles noirs de E.

On peut établir la propriété suivante: Si α et β sont deux points quelconques de (a, b) n'appartenant pas à un même intervalle noir de E (l'un des points α, β peut être situé en dehors de (a, b)) et si $\mathcal{E}$ est un ensemble parfait quelconque de 1re espèce construit sur (α, β), les ensembles E et $\mathcal{E}$ ont des points communs.

Revenons à notre problème.

Soient E_x et E_y deux ensembles parfaits de 1re espèce construits sur OA et OB; l'ensemble plan E construit à partir de E_x et E_y est enfermé à l'intérieur d'un rectangle. A tout intervalle noir δ_i de E_x correspond une *bande noire verticale* comprise entre les parallèles à Oy passant par les extrémités de δ_i. De même, à tout intervalle noir de E_y correspond une bande noire *horizontale*.

Soit maintenant d une droite quelconque coupant le contour du rectangle, et d_0 la portion de d comprise à l'intérieur de ce contour. On peut établir le théorème suivant:

Théorème. Pour que la droite d passe par un point de E, il faut et il suffit que les deux extrémités de d_0 n'appartiennent pas à une même bande noire.

La solution du problème de M. Plancherel en découle immédiatement.

Supposons, pour fixer les idées, $OA = OB = 1$ et $O < \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$.

On a alors

$$m(E_\lambda) = \sin\vartheta + \cos\vartheta - \sum_i (\delta_i \cos\vartheta - \sin\vartheta) ,$$

la somme étant étendue à tous les i tels que $\delta_i > tg\,\vartheta$.

Un exposé complet de ces recherches paraîtra dans le t. IV des *Fundamenta mathematicae*, actuellement sous presse.

3. M. Ed. Guillaume (Berne). — *A propos des discussions de la Théorie d'Einstein au Collège de France.* — L'auteur rappelle l'objection qu'il a présentée à Paris, quelques semaines auparavant, et qui a été reproduite dans la *Revue générale des Sciences* (nº 11, p. 322-324, 1922).

[1] *Accademia dei Lincei*, novembre 1920, p. 291 et 316.