Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1920-1921)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUES SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET LES ANTINOMIES CANTORIENNES. — II.

Autor: Mirimanoff, D.

Kapitel: CHAPITRE II.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515708

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Dans un travail déjà cité, M. Zermelo a cherché à préciser la condition à laquelle doit satisfaire la propriété spécifique P. Je rappelle que ce mémoire a été analysé par H. Poincaré dans le chapitre IV (La logique de l'infini) de ses « Dernières Pensées ».

Quoi qu'il en soit, j'ai admis la propriété 1 sans discussion, de même que j'ai admis sans discussion les trois postulats sur lesquels je me suis appuyé dans la seconde partie de ma note sur les antinomies de Russell et de Burali-Forti, car c'est le problème fondamental, et non la discussion des postulats, que j'avais en vue dans ce travail. Je voulais montrer que mes postulats pouvaient suffire dans le cas particulier que j'avais à traiter.

Du reste, à part le troisième, ces postulats, sous une forme un peu différente, ont déjà été utilisés, entre autres par Zermelo, Hessenberg, J. König, et analysés par H. Poincaré. Je rappelle que mon postulat 1 correspond à l'axiome IV de Zermelo, et le postulat 2 à son axiome V. Quant au postulat 3, on s'en est servi implicitement.

A ces postulats s'appliquent en partie les remarques que j'ai faites à propos de la propriété 1, et cela est vrai surtout du postulat 3. Dans ce postulat, la loi de correspondance doit être définie sans ambiguïté. Et la même question se pose que tout à l'heure : cette condition est-elle suffisante ?

Chapitre II.

4. *Remarques sur les antinomies cantoriennes.* Les antinomies cantoriennes ont été parfois comparées aux arguments de Zénon d'Elée et aux antinomies kantiennes. Qu'il s'agisse de l'ensemble de Russell ou de l'antinomie de Burali-Forti, ou encore de l'exemple si curieux donné par M. Richard, des contradictions en apparence irréductibles éclatent entre les conclusions qui nous semblent également légitimes.

Qu'un raisonnement correct aboutisse à une contradiction, le fait n'a rien de surprenant par lui-même. Une contradic-

tion apparaît chaque fois que des conditions incompatibles ont été introduites dans les hypothèses ou les définitions premières. Et c'est bien ce que l'on constate dans les exemples cantoriens. Sans nous en douter, nous avons introduit des conditions incompatibles dans la définition de l'ensemble de Russell, comme dans celles des ensembles de Burali-Forti et de Richard. Ces conditions varient d'un exemple à l'autre, mais les mêmes caractères se retrouvent partout, caractères que l'on arrive à dégager en groupant les exemples connus, et en les rapprochant des cas analogues pris dans d'autres domaines. Du reste cette étude comparative a déjà été faite dans ses grandes lignes, à part quelques points que je chercherai à mettre en lumière.

Mais là n'est pas tout le problème. Nous avons beau savoir que des conditions incompatibles ont été introduites dans les définitions des ensembles cantoriens, la contradiction finale nous déconcerte quand même. Nous voyons bien qu'en raisonnant sur un objet X on aboutit à une contradiction, mais des raisons en apparence aussi bonnes semblent prouver que X existe. Ce qui nous déconcerte, c'est que des objets dont l'existence nous paraît certaine puissent ne pas exister (dans les champs que leurs définitions imposent).

D'une part, je le répète, en raisonnant sur un ensemble X nous nous heurtons à une contradiction : l'ensemble X n'existe pas. Il n'existe pas parce que des conditions incompatibles ont été introduites dans la définition de X : en vertu de cette définition, par exemple, non seulement les propriétés de l'ensemble X dépendent du choix de ses éléments, mais, comme H. Poincaré l'a si bien mis en lumière, le choix des éléments dépend à son tour des propriétés de X — et ces deux relations sont incompatibles.

D'autre part, les conditions imposées par la définition initiale semblent déterminer le choix des éléments d'une manière univoque, et il nous paraît évident qu'à un choix déterminé doive correspondre un ensemble déterminé.

Nous en concluons donc que l'ensemble X existe. Mais sommes-nous si sûrs que les prémisses sur lesquelles nous venons de nous appuyer soient vraies pour les antinomies

cantoriennes ? Certes, la seconde est vraie pour quelques-unes d'entre elles. Supposons qu'elle le soit. Mais en est-il de même de la première ? Le choix des éléments résulte-t-il d'une manière univoque de notre première interprétation de la définition de X ? La réponse est négative. Lorsque nous arrêtons notre choix, nous abandonnons, sans nous en douter, une partie des hypothèses sur lesquelles nous nous étions appuyés, ou bien nous en introduisons de nouvelles. Les propriétés de l'objet ainsi créé, que j'appellerai Y, dépendent de l'attitude nouvelle que nous adoptons ; Y peut exister, mais Y n'est pas X. C'est là le point que je chercherai surtout à mettre en lumière.

Bien entendu, nous n'avons pas toujours le droit de nous écarter ainsi de l'interprétation primitive. Mais dans les exemples cantoriens les hypothèses ne sont pas toujours indiquées explicitement, et la définition première peut comporter des interprétations différentes. Il ne sera pas difficile de dégager dans chaque cas particulier les hypothèses essentielles implicitement introduites qui déterminent notre choix et caractérisent notre attitude.

Je commencerai par l'étude d'un exemple algébrique qui présente une certaine analogie avec les antinomies cantoriennes. J'examinerai ensuite plusieurs exemples cantoriens.

5. *Exemple algébrique* (a). On donne n nombres réels, a_1, a_2, ... a_n positifs ou négatifs. Je suppose que deux au moins de ces nombres soient supérieurs à $\frac{1}{2}$; à part cela, les nombres a peuvent être quelconques.

Soit maintenant x un nombre défini de la manière suivante : x est la somme des carrés de ceux des nombres de la suite

$$x, a_1, a_2, \ldots a_n \tag{1}$$

qui sont réels et supérieurs à $\frac{1}{2}$.

Le nombre x ainsi défini existe-t-il ?

Je ferai remarquer d'abord que le nombre x, s'il existe, est réel et supérieur à $\frac{1}{2}$. En effet, les carrés dont la somme

est égale à x sont tous positifs et supérieurs à $\frac{1}{4}$, et leur nombre est au moins égal à 2. Donc $x > \frac{1}{2}$.

D'autre part, le nombre x, s'il existe, est racine de l'équation

$$x = x^2 + s \ , \tag{2}$$

où s est la somme des carrés des a_i réels et supérieurs à $\frac{1}{2}$. En effet, x étant supérieur à $\frac{1}{2}$, x doit figurer parmi les carrés dont la somme est x.

Mais l'équation (2) n'a pas de racines réelles, puisque $1 - 4s < 0$.

Le nombre x est donc à la fois réel et imaginaire. En raisonnant sur x, on aboutit à une contradiction; en d'autres termes, x n'existe pas.

Et non seulement x n'existe pas, mais il n'existe pas d'équation définissant x, car aucun choix ne s'harmonise avec les conditions imposées à x.

Nous avons, sans nous en douter, introduit des conditions incompatibles : d'une part, les propriétés de x dépendent du choix des éléments de la suite (1), et d'autre part, le choix de ces éléments dépend des propriétés du nombre x.

On pourrait être tenté de raisonner de la manière suivante : puisque x n'existe pas, son carré ne doit pas figurer dans la somme qui fournit le nombre cherché. Cette somme se réduit donc à s, et par conséquent le nombre cherché est égal à s; il existe, puisque s existe.

Mais l'antinomie à laquelle on se heurte ainsi n'est qu'apparente, car la conclusion dernière que nous venons de tirer est illégitime. Il est vrai que la somme s des carrés choisis définit un nombre qui existe, mais ce nombre, que j'appellerai y, n'est pas le nombre qu'on cherchait tout à l'heure; y n'est pas x. Nous avons modifié la définition initiale, et notre attitude n'est pas restée la même.

Généralisons l'énoncé du problème.

Exemple algébrique (b). Partons encore des nombres donnés $a_1, a_2, \ldots a_n$ mais envisageons une suite de k inconnues $u, u', u'', \ldots u^{(k)}$ formant une sorte de chaîne.

Le nombre $u^{(i)}$ est par définition la somme des carrés de ceux des nombres de la suite

$$u^{(i+1)},\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n$$

qui sont réels et supérieurs à $\frac{1}{2}$.

En particulier le nombre u ou u_0 est la somme des carrés de ceux des nombres de la suite

$$u',\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n$$

qui sont réels et supérieurs à $\frac{1}{2}$.

C'est là évidemment une définition lacunaire. En effet, les données sont insuffisantes; le nombre u est défini à l'aide de u', u' à l'aide de u'', etc., mais la descente n'aboutit pas à un champ connu, et aucun des choix particuliers ne peut être fait d'une manière complète.

Mais supposons qu'on donne l'un des $u^{(i)}$; tous ceux qui précèdent s'en déduiront alors immédiatement; on calculera les $u^{(i-1)}$, $u^{(i-2)}$, ... u' et u de proche en proche. Resterait à vérifier que la valeur donnée à $u^{(i)}$ est acceptable.

Au lieu de donner la valeur d'un terme de la suite des $u^{(i)}$, on pourrait introduire une relation complémentaire. Supposons par exemple qu'on introduise la condition $u = u'$. chacun des nombres inconnus u et u' devient alors égal au nombre x de l'exemple (a); aucun d'eux n'existe, car les relations $u = f(u', \ldots)$ (u est la somme des carrés, etc.) et $u = u'$ sont incompatibles.

Dans l'exemple (a), ces deux relations ont été introduites en même temps; ici nous les avons dissociées en désignant les inconnues des deux membres de l'équation (2) par des lettres différentes.

Modifions la 2e condition : au lieu de la relation $u = u'$, introduisons la suivante $u' = u''$. C'est maintenant u' ou u'', et non u, qui est défini de la même manière que x; u' n'existe pas, mais le nombre u existe et devient égal à y de l'exemple (a).

Nous pourrions de même introduire la relation $u^{(i)} = u^{(i+1)}$ pour une certaine valeur de l'indice i supérieure à 1; alors

$u^{(i)}$ n'existerait pas, mais les nombres $u^{(i-1)}$, $u^{(i-2)}$, ... u', u prendraient des valeurs déterminées.

6. *Exemple cantorien.* Envisageons « l'ensemble de tous les ensembles ordinaires existants définissables à l'aide d'un nombre fini de mots ».

Cet exemple, que je désignerai par la lettre X, existe-t-il?

Rangeons toutes les phrases possibles dans un ordre déterminé, par exemple celui de Richard[1]. Biffons toutes les phrases qui ne définissent pas des ensembles ordinaires existants. Parmi celles qui restent, et qui définissent des ensembles ordinaires existants, on fera un nouveau triage, de manière qu'à des phrases différentes ne correspondent que des ensembles différents. On formera ainsi un tableau définitif T qui fournira les éléments de X.

Mais les opérations que je viens de définir s'harmonisent-elles avec les conditions introduites?

Parmi les phrases que nous avons à envisager figure aussi la phrase P mise entre guillemets, et qui nous a servi à définir X. Si X existait, P ferait partie du tableau définitif, puisque X est un ensemble ordinaire, et l'on aurait $X = (X, \ldots)$, conclusion absurde. Donc X n'existe pas.

L'analogie avec l'ensemble (a) est frappante. Comme dans l'exemple (a), on pourrait être tenté de raisonner de la manière suivante : puisque l'ensemble défini par la phrase P n'existe pas, cette phrase doit être biffée du tableau T. Alors la contradiction à laquelle nous venons de nous heurter ne se présente plus, et si l'on fait abstraction d'autres difficultés, certes possibles, l'ensemble résultant existe. Donc X existe.

Mais, comme dans l'exemple (a), la conclusion finale est illégitime. Il est vrai que l'ensemble résultant, que j'appellerai Y, est exempt de la contradiction que nous avons rencontrée tout à l'heure, mais cet ensemble n'est pas l'ensemble X.

Dans les deux raisonnements que nous venons de faire, nous nous sommes appuyé, sans nous en douter, sur des hypothèses différentes. Essayons de dégager ces hypothèses.

---

[1] *Revue générale des Sciences*, t. 16, 1905.

Nous avons désigné par P la phrase initiale entre guillemets. Comme dans l'exemple (b), désignons par U l'ensemble correspondant. U est tantôt X tantôt Y ; cela dépend du choix des hypothèses introduites. Or le tableau T va contenir une phrase composée des mêmes mots que P. Désignons-la par P′. La phrase P′ diffère de P par la position qu'elle occupe dans la suite des phrases qu'on est amené à envisager. Soit U′ l'ensemble correspondant. Pour former les éléments de U′, on est conduit à envisager un second tableau, que j'appellerai T′ (ou bien revenir une seconde fois au tableau T). Ce tableau contient une phrase composée des mêmes mots que P et P′, que j'appellerai P″, et ainsi de suite.

On aura donc une suite de phrases P, P′, P″... et une suite d'ensembles inconnus U, U′, U″...

Si aucune condition nouvelle n'est introduite, le problème est indéterminé.

Mais dans notre premier raisonnement nous nous sommes appuyé sur l'hypothèse suivante, que j'appellerai hypothèse H : le sens de la phrase entre guillemets ne dépend pas de la position relative qu'elle occupe dans la suite des phrases envisagées.

Nous avons donc, comme dans l'exemple (b), introduit la condition $U = U'$. C'est l'ensemble ainsi défini que nous avons désigné par X. Or, X n'existe pas, car la condition introduite est incompatible avec la relation qui lie U à U′. Aucun choix ne s'harmonise avec cette condition.

Dans notre second raisonnement, nous avons admis l'hypothèse H pour P′ et P″, sans l'affirmer de P et P′; au lieu de la relation $U = U'$, nous avons envisagé celle-ci : $U' = U''$. L'ensemble Y ainsi défini n'implique plus la contradiction que nous avons constatée pour X. Il n'est pas certain qu'il existe ; mais Y n'est pas X.

Nous avons donc interprété la définition initiale de deux façons différentes ; la première se présente naturellement à l'esprit, mais la seconde peut être justifiée à son tour. Elle peut même être imposée par la phrase initiale.

Supposons, par exemple, que la phrase entre guillemets soit complétée par l'adjonction de l'hypothèse particulière

qui caractérise notre choix. L'interprétation que nous devrons donner à une phrase $P^{(i)}$ ainsi complétée dépendra de $P^{(i-1)}$, c'est-à-dire de la phrase qui la précède, puisque la phrase $P^{(i-1)}$ détermine notre attitude à l'égard de $P^{(i)}$. Le sens d'une phrase $P^{(i)}$ est donc dominé par toutes celles qui la précèdent. Seule la phrase initiale P n'est dominée par aucune autre, car elle occupe la première place dans la suite de ces phrases, et l'on voit que la notion d'ordre, qui est une notion relative, joue ici un rôle essentiel.

Comme nous l'avons déjà dit, l'analogie entre notre exemple cantorien et l'exemple algébrique (a) est étroite, mais elle n'est pas complète. Dans l'exemple algébrique (a), la définition du nombre x ne comportait aucune ambiguïté. Ici, au contraire, la précision n'est pas parfaite, et rien ne nous renseigne explicitement sur le choix des hypothèses premières. L'interprétation de la définition initiale que je viens de donner, tout en étant moins naturelle, est admissible; c'est du reste celle que parfois, inconsciemment, on adopte, mais d'autres interprétations et d'autres attitudes sont possibles. Je me bornerai à indiquer la suivante, qui a été adoptée par M. Richard dans un exemple analogue : Maintenons l'hypothèse H, mais donnons aux mots « définissable » et « défini » un sens plus étroit; n'envisageons que les ensembles ordinaires susceptibles d'être *totalement* définis à l'aide d'un nombre fini de mots. On pourra dire alors, au point de vue où se place M. Richard, que la phrase P ne fournit pas une définition totale de U, et que l'ensemble U ne peut être *totalement* défini qu'à l'aide d'un nombre infini de mots. La phrase P′ sera donc biffée du tableau T, et la contradiction que nous avons rencontrée dans notre première interprétation de la phrase P ne se présentera plus.

La distinction introduite par M. Richard manque peut-être de précision, mais l'important pour nous est qu'elle permet une interprétation nouvelle de la phrase entre guillemets, et qu'à une interprétation nouvelle correspond un ensemble nouveau qu'on pourrait appeler Z.

L'ensemble Z se confond-il avec Y ? Ce n'est pas évident,

mais l'essentiel pour nous c'est que les ensembles Z et Y ne doivent pas être confondus avec X.

7. *Antinomie de Richard.* L'exemple très curieux donné par Richard peut être rapproché de l'ensemble cantorien que nous venons d'examiner.

Envisageons l'ensemble E de tous les nombres décimaux existants qu'on peut définir à l'aide d'un nombre fini de mots. Pour former les éléments de cet ensemble, nous pouvons supposer, comme tout à l'heure, que toutes les phrases possibles sont rangées dans un certain ordre, celui de Richard, par exemple; parmi ces phrases, faisons un choix; ne gardons que celles qui définissent des nombres décimaux, et faisons ensuite un triage analogue à celui de l'exemple précédent. Les phrases du tableau T ainsi formé et les nombres correspondants de E pourront être numérotés, en supposant que T et E existent. En partant de l'ensemble E, formons un nombre X, à l'aide d'un procédé qui avait déjà été indiqué par G. Cantor : par définition, la n^e décimale de X sera $\delta + 1$, si la n^e décimale du n^e nombre de E est δ, et si $\delta < 8$; elle sera 1, si $\delta = 8$ ou 9. On voit que le nombre X ainsi défini est différent du n^e nombre de E, et cela quel que soit n. Nous arrivons donc à cette conclusion : d'une part le nombre X n'appartient pas à l'ensemble E, et d'autre part il devrait en faire partie, puisqu'il est défini à l'aide d'un nombre fini de mots. Donc X, et par conséquent E et T n'existent pas.

Essayons de dégager les hypothèses sur lesquelles nous nous sommes implicitement appuyé. Soit P la phrase initiale, U le nombre de Richard, existant ou non, défini par P. Soit de même P′ la phrase du tableau qui est composée des mêmes mots que P, U′ le nombre défini par P′, etc. Comme dans l'exemple précédent, nous nous sommes appuyé sur l'hypothèse H : le sens de la phrase que nous désignons tantôt par P, tantôt par P′, ne dépend pas de la place qu'elle occupe dans la suite des phrases envisagées. Donc $U = U'$. Or, par définition, une certaine décimale de U doit être différente de la décimale de même rang de U′: la condition $U = U'$ est donc incompatible avec la relation qui lie U à U′, et par con-

séquent le nombre U ainsi défini, que nous avons appelé X, n'existe pas. L'opération par laquelle nous avons passé au tableau T et à l'ensemble E est impossible; aucun choix, aucun triage ne s'harmonise avec les conditions introduites.

Supposons maintenant que l'on admette l'hypothèse H pour P′ et P″, sans l'affirmer de P et P′. De U′ = U″ je conclurai comme tout à l'heure que U′ n'existe pas, mais je n'aurai plus le droit d'affirmer qu'il doit en être de même du nombre U. Soit Y le nombre U ainsi spécifié. Bien que la contradiction à laquelle nous nous sommes heurté tout à l'heure ne se présente plus, il n'est pas certain que Y existe, à moins qu'on ne précise davantage les conditions imposées au choix des phrases de T. Mais quelle que soit l'interprétation finale à laquelle on s'arrête, Y ne doit pas être confondu avec X.

On pourrait, comme dans l'exemple précédent, adopter une attitude différente, et en donnant au mot « défini » un sens plus étroit, n'envisager que les nombres pouvant être *totalement* définis à l'aide d'un nombre fini de mots. La contradiction tomberait, du moins sous la forme qui a été signalée par Richard.

Je voudrais encore rappeler le point de vue de H. Poincaré. L'ensemble E, dit-il à la page 206 de « Science et Méthode » (éd. Flammarion), est « l'ensemble de *tous* les nombres que l'on peut définir par un nombre fini de mots, *sans introduire la notion de l'ensemble* E *lui-même. Sans quoi la définition de* E *contiendrait un cercle vicieux;* on ne peut pas définir E par l'ensemble E lui-même ». On voit donc que H. Poincaré interprète la phrase initiale P d'une certaine manière; il la précise par l'adjonction des mots : *sans introduire la notion de l'ensemble* E *lui-même.* Que cette interprétation soit naturelle ou non, peu importe; du reste, elle n'est pas essentiellement différente de l'une des interprétations que nous avons déjà indiquées. Mais ni la restriction exprimée par les mots soulignés, ni le mot « totalement » introduit par Richard, ni le point de vue que nous avons indiqué nous-même ne sont imposés par la phrase initiale.

Toutes ces attitudes sont acceptables ; aucune d'elles n'est obligatoire.

8. Mais reprenons l'interprétation première de la phrase initiale : admettons donc l'hypothèse H pour les phrases P, P′, P″, ... , n'introduisons ni la restriction de Poincaré ni celle de Richard, et pour fixer les idées, reprenons notre exemple cantorien. Nous savons que l'ensemble X défini par P n'existe pas, aucun choix des éléments de X ne s'harmonisant avec les hypothèses introduites. Guidés par une intuition lacunaire, quelques logiciens avaient cru d'abord que ce fait ne pouvait se présenter que dans le cas d'un ensemble infini, mais comme on l'a déjà fait remarquer, on peut imaginer des exemples où le choix ne porte que sur un nombre limité de termes. Il suffirait, par exemple, d'envisager des ensembles définis à l'aide de n mots, n étant un nombre entier quelconque inférieur à un nombre fixe N.

On a objecté d'autre part que la propriété de pouvoir être défini à l'aide d'un nombre fini de mots n'est pas à proprement parler une propriété des objets mêmes, mais celle des phrases qui les définissent. La distinction peut paraître subtile, mais elle a sa raison d'être lorsque les objets définis sont des ensembles. En effet, pour Cantor, les propriétés d'un ensemble dérivent de celles de ses éléments, mais la propriété de pouvoir être défini à l'aide de n mots s'introduit du dehors. Nous nous écartons donc de la notion cantorienne. Cette propriété qui vient s'ajouter aux propriétés intrinsèques influe sur le choix des éléments de X. Et les liaisons qui s'établissent ainsi entre le choix des éléments et les propriétés de X sont incompatibles. Mais dans les exemples de Russell et de Burali-Forti, interprétés en partant d'hypothèses analogues, la contradiction apparaît quand même. On aurait donc tort de voir dans la particularité que nous venons d'indiquer un facteur caractéristique, raison unique des contradictions. Ce qui est commun aux exemples cités, comme H. Poincaré l'a admirablement mis en lumière dans ses articles de la *Revue de Métaphysique et de Morale*, c'est cette double relation par laquelle, dans notre première interprétation de la phrase initiale, le choix des éléments

est relié aux propriétés de X; non seulement les propriétés de X dépendent du choix des éléments, mais ce choix est à son tour une fonction de X.

Lorsque nous modifions notre attitude en donnant à la phrase P une interprétation différente, nous brisons une partie de ces liens, en particularisant les hypothèses implicitement faites. Une distinction s'introduit entre les éléments sur lesquels porte notre choix et l'ensemble X qui en dérive, et nous retrouvons la notion cantorienne.

C'est ici qu'il convient de rappeler le point de vue de J. König. Pour Cantor, avons-nous dit, deux ensembles renfermant les mêmes éléments a, b, c, ... doivent être regardés comme identiques; chacun d'eux peut être représenté par la même notation $(a, b, c, \ldots)$. Pour J. König, au contraire, il est utile, parfois nécessaire même, de distinguer plusieurs sortes ou genres d'opérations de réunion, qu'on pourrait figurer, comme je l'ai déjà fait remarquer, par des parenthèses de formes différentes. On est conduit ainsi à envisager des ensembles $(a, b, c, \ldots)$, des ensembles $[a, b, c, \ldots]$, etc., que nous appellerons avec J. König des ensembles α, des ensembles β, etc.

Reprenons maintenant notre premier exemple cantorien. Donnons à la phrase P l'interprétation suivante : supposons que le choix des éléments ne porte que sur des ensembles α, mais que l'ensemble cherché soit un ensemble β.

L'ensemble cherché, que j'appellerai K, est donc l'ensemble genre β de tous les ensembles ordinaires genre α possédant la propriété caractéristique donnée. Une distinction s'introduit ainsi entre l'ensemble K et les éléments de K, et la contradiction ne se présente plus, du moins sous la forme où elle nous est primitivement apparue. Et l'on voit qu'ici encore il s'agit bien d'une interprétation nouvelle de la phrase P. Comme dans les interprétations précédentes, l'ensemble K ainsi défini n'est pas l'ensemble X. Pour J. König, l'ensemble X serait l'ensemble α de tous les ensembles α ou l'ensemble β de tous les ensembles β possédant les propriétés données.

L'inconvénient principal de la conception de J. König est

qu'elle manque de précision. Que faut-il entendre exactement par ensembles α, ensembles β, etc.? Par quoi l'opération figurée par une parenthèse ordinaire diffère-t-elle, par exemple, de celle qui est représentée par un crochet? Le livre de J. König ne nous donne que fort peu d'indications à ce sujet. Les lettres α, β, ... sont-elles de simples étiquettes servant uniquement à nous rappeler que *par définition* l'opération désignée par α doit être considérée comme différente de celle désignée par β? Faut-il supposer au contraire que dans chaque cas particulier des conventions spéciales doivent être faites permettant de caractériser chacune des opérations particulières? Si, comme cela semble résulter de certains passages du livre de J. König, les genres α, β ... se distinguent entre eux par les hypothèses qui déterminent le choix des éléments, la différence entre X et K est de même nature que celle qui existe entre X et l'ensemble Y, et dans ce cas on ne voit pas bien la nécessité de s'écarter de la notion cantorienne. J'aurai du reste encore l'occasion de revenir sur ce point.

9. Je voudrais encore faire quelques remarques sur une question qui a été fort peu étudiée jusqu'à présent. Nous avons vu qu'en brisant une partie des liens qui, dans notre première interprétation de la phrase initiale, rattachent le choix des éléments aux propriétés de l'ensemble cherché, la contradiction ne se présente plus sous sa forme primitive. Mais avons-nous le droit d'affirmer qu'elle ne va pas apparaître sous quelque forme nouvelle? Je montrerai que les attitudes qu'on adopte pour éviter la contradiction première ne nous mettent pas toujours à l'abri de contradictions plus profondes, à moins qu'on n'introduise des restrictions nouvelles.

Prenons notre exemple cantorien, et plaçons-nous au point de vue de J. König. Envisageons donc l'ensemble β de tous les ensembles ordinaires α que l'on peut définir à l'aide d'un nombre fini de mots.

La contradiction primitive ne se présente plus si β est différent de α. Mais l'ensemble ainsi défini existe-t-il nécessairement? En d'autres termes, suffit-il, comme on serait

tenté de le croire au premier abord, de supposer β différent de α? La réponse est négative. Si en effet cette restriction était suffisante, l'ensemble α de tous les ensembles β existerait aussi.

Soient K le premier de nos ensembles, K′ le second. K′ serait un élément de K; $K = [K', \ldots]$.

Mais parmi les éléments de K′, qui sont des ensembles β, devrait figurer aussi l'ensemble K, d'où $K = [(K, \ldots), \ldots]$.

On aurait une descente infinie, conclusion absurde, puisque K est un ensemble ordinaire. On voit donc que la contradiction se présente encore, mais elle apparaît un cran plus bas.

Il ne suffit donc pas de supposer que le genre de K soit différent de celui des éléments de K; il faut encore que le genre β, en supposant qu'il soit reconnaissable, n'apparaisse dans aucune descente partant de K, condition qui est réalisée, par exemple, lorsque le long de toute descente partant de K on ne rencontre que des ensembles α. Resterait à voir si ces restrictions nouvelles, dont J. König semble avoir reconnu la nécessité, sont suffisantes.

Je ne suis pas sûr que dans mon interprétation, peut-être trop formelle, des symboles α et β, je ne m'écarte pas de la pensée de J. König, mais cette interprétation se présente naturellement à l'esprit; elle est justifiée par quelques passages du livre de J. König, et en particulier par sa théorie des types d'ordre.

Prenons maintenant l'interprétation de la phrase P que nous avons nous-mêmes indiquée dans le numéro 6, et qui est, je le rappelle, caractérisée par ceci: j'admets l'hypothèse H pour les phrases P′, P″..., sans l'affirmer de P et P′. Par cette convention, notre attitude n'est définie qu'à l'égard des phrases P, P′... et non vis-à-vis d'autres phrases du tableau de Richard. Une indétermination subsiste, et nous n'avons pas le droit d'affirmer que des contradictions nouvelles ne vont pas apparaître suivant la manière dont notre interprétation aura été spécifiée.

10. Et cela m'amène à parler d'une attitude particulière que, sans la préciser, nous adoptons souvent, puisqu'elle s'harmonise le mieux avec la notion cantorienne d'ensemble.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de l'ensemble X de tous les ensembles ordinaires possédant une propriété donnée. Dans les interprétations que nous avons examinées jusqu'ici, le choix des éléments de X était déterminé par des hypothèses particulières : nous admettions, par exemple, l'hypothèse H pour les phrases P′ et P″. Supposons maintenant qu'aucune restriction ne soit imposée aux hypothèses déterminant le choix des éléments. Suivant les hypothèses adoptées, une même phrase, la phrase P′ par exemple, pourra prendre des acceptions très différentes ; toute interprétation de P′ exempte de contradiction fournira un élément à l'ensemble X. Au point de vue de König, cette attitude revient, si je ne me trompe, à n'imposer aucune restriction à la nature des opérations relatives aux éléments de X. L'ensemble X ne serait donc plus l'ensemble β de tous les ensembles ordinaires α (possédant la propriété donnée), mais l'ensemble de tous les ensembles α, β, γ, ... etc., sans qu'aucune hypothèse soit faite sur le genre de l'ensemble X.

Cette attitude pourrait sembler artificielle dans les cas que nous avons examinés jusqu'à présent. C'est celle au contraire qu'on adopte ordinairement sans toujours s'en rendre compte dans les exemples de Russell et de Burali-Forti, où la considération des phrases n'est pas imposée par les définitions initiales. Envisageons, par exemple, l'ensemble X de tous les ensembles ordinaires existants. C'est là un des ensembles transformés de Russell.

Nous aurons encore à envisager des phrases, mais ces phrases ne nous serviront que de points d'appui. Nous aurons le droit d'introduire toutes sortes d'hypothèses ; il suffira que ces phrases définissent des ensembles ordinaires existants. Les propriétés de X seront des fonctions de celles des éléments de X ; les hypothèses ne porteront que sur les phrases définissant les éléments, et non sur la phrase P ; nous rentrons ainsi dans la notion cantorienne.

Je sais que ces explications peuvent donner lieu à des difficultés nouvelles, mais je n'ai fait que préciser dans une certaine mesure une attitude que nous adoptons souvent

implicitement lorsque, guidés par notre intuition, nous voulons maintenir la notion cantorienne.

L'ensemble X ainsi défini existe-t-il? La réponse est négative, car l'interprétation de la phrase P imposée par notre attitude ne saurait figurer parmi les interprétations acceptables de P'; elle est conditionnée par ces interprétations particulières, mais elle ne se confond avec aucune d'elles. L'ensemble X n'existe pas; la formation de ses éléments ne comporte pas de borne, car tout ensemble d'ensembles ordinaires, pourvu qu'il existe, fait partie de X.

L'attitude que je viens de définir est celle que j'ai adoptée implicitement dans ma première note sur les antinomies de Russell et de Burali-Forti [1]. Dans ces antinomies, les phrases n'interviennent pas directement, mais si l'on veut préciser, il faut bien en tenir compte.

LES DEUX SUITES FIBONACCIENNES FONDAMENTALES $(u_n)(v_n)$.

Tables de leurs termes jusqu'à n = 120

PAR

C.-A. LAISANT (Paris).

---

1. — La suite de Fibonacci (1 1 2 3 5 8 ...) tire son origine de l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$. Si α, β sont les racines de cette équation, la suite est formée par les valeurs successives de la fonction $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, qui est égale à l'unité pour $n = 1$ et $n = 2$. Les termes successifs sont obtenus par la relation de récurrence fondamentale $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

Ens. math., t. 19, 1917, p. 37 à 52.