

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1920-1921)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DEVELOPPEMENT D'UNE PUISSANCE QUELCONQUE, ENTIÈRE ET POSITIVE, DE $\cos x$ OU DE $\sin x$ EN FONCTION LINÉAIRE DES \cos ET \sin DE MULTIPLES DE x
Autor: Barbette, Edouard
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515718>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DÉVELOPPEMENT D'UNE PUISSANCE QUELCONQUE,
ENTIÈRE ET POSITIVE,
DE $\cos x$ OU DE $\sin x$ EN FONCTION LINÉAIRE
DES \cos ET \sin DE MULTIPLES DE x

PAR

Edouard BARBETTE (Liège).

Le développement d'une puissance quelconque, entière et positive, de $\cos x$ ou de $\sin x$ en fonction linéaire des \cos et \sin de multiples de x , repose sur les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — Si l'on a

$$\begin{aligned} 2^{2n-1} \cos^{2n} x = & A_0 + A_1 \cos 2x + A_2 \cos 4x + A_3 \cos 6x + \dots \\ & + A_{n-2} \cos 2(n-2)x + A_{n-1} \cos 2(n-1)x + A_n \cos 2nx, \end{aligned} \quad (1)$$

on a aussi :

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad 2^{2n} \cos^{2n+1} x = & (2A_0 + A_1) \cos x + (A_1 + A_2) \cos 3x + (A_2 + A_3) \cos 5x + \dots \\ & + (A_{n-2} + A_{n-1}) \cos (2n-3)x + (A_{n-1} + A_n) \cos (2n-1)x \\ & + A_n \cos (2n+1)x \\ \equiv & B_0 \cos x + B_1 \cos 3x + B_2 \cos 5x + \dots + B_{n-2} \cos (2n-3)x \\ & + B_{n-1} \cos (2n-1)x + B_n \cos (2n+1)x \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad 2^{2n+1} \cos^{2n+2} x = & B_0 + (B_0 + B_1) \cos 2x + (B_1 + B_2) \cos 4x + \dots \\ & + (B_{n-2} + B_{n-1}) \cos 2(n-1)x + (B_{n-1} + B_n) \cos 2nx + B_n \cos 2(n+1)x. \end{aligned}$$

THÉORÈME II. — Si l'on a

$$\begin{aligned} 2^{2n-1} \sin^{2n} x = & A_0 - A_1 \cos 2x + A_2 \cos 4x - A_3 \cos 6x + \dots \\ & \pm A_{n-2} \cos 2(n-2)x \mp A_{n-1} \cos 2(n-1)x \pm A_n \cos 2nx, \end{aligned} \quad (3)$$

on a aussi :

$$\begin{aligned}
 1^o \quad 2^{2n} \sin^{2n+1} x &= (2A_0 + A_1) \sin x - (A_1 + A_2) \sin 3x + (A_2 + A_3) \sin 5x - \dots \\
 &\pm (A_{n-2} + A_{n-1}) \sin (2n-3)x \mp (A_{n-1} + A_n) \sin (2n-1)x \pm A_n \sin (2n+1)x \\
 &\equiv B_0 \sin x - B_1 \sin 3x + B_2 \sin 5x - \dots \pm B_{n-2} \sin (2n-3)x \\
 &\mp B_{n-1} \sin (2n-1)x \pm B_n \sin (2n+1)x \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^o \quad 2^{2n+1} \sin^{2n+2} x &= B_0 - (B_0 + B_1) \cos 2x + (B_1 + B_2) \cos 4x - \dots \\
 &\mp (B_{n-2} + B_{n-1}) \cos 2(n-1)x \pm (B_{n-1} + B_n) \cos 2nx \mp B_n \cos 2(n+1)x,
 \end{aligned}$$

+ ou —, selon que n est pair ou impair.

Ces théorèmes se démontrent facilement en multipliant les deux membres de l'égalité (1), puis de l'égalité (2), par $2\cos x$, — les deux membres de l'égalité (3), puis de l'égalité (4), par $2\sin x$, tout en faisant usage des formules de logarithmisation :

$$\begin{aligned}
 2\sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q) &= \sin p + \sin q, \\
 2\sin \frac{1}{2}(p-q) \cos \frac{1}{2}(p+q) &= \sin p - \sin q; \\
 2\cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q) &= \cos p + \cos q, \\
 -2\sin \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q) &= \cos p - \cos q.
 \end{aligned}$$

Puisque

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \quad \text{et} \quad 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x,$$

la loi des coefficients, pris en valeur absolue, des puissances successives donnant $2^{m-1} \cos^m x$ ou $2^{m-1} \sin^m x$, à partir de $m = 2$, se résume en le tableau suivant :

1	1				
3	1				
3	4	1			
10	5	1			
10	15	6	1		
35	21	7	1		
35	56	28	8	1	
126	84	36	9	1	
126	210	120	45	10	1

en sorte que

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$$

$$8\cos^4 x = 3 + 4\cos 2x + \cos 4x$$

$$16\cos^5 x = 10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x$$

$$32\cos^6 x = 10 + 15\cos 2x + 6\cos 4x + \cos 6x$$

et

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$$

$$8\sin^4 x = 3 - 4\cos 2x + \cos 4x$$

$$16\sin^5 x = 10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x$$

$$32\sin^6 x = 10 - 15\cos 2x + 6\cos 4x - \cos 6x$$

De cette loi des coefficients et de la loi des coefficients du binôme de Newton, on déduit les quatre relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^{2n-2} \cos^{2n-1} x = \sum_{i=n-1}^{i=0} C_{2n-1}^i \cos (2n - 2i - 1)x , \\ 2^{2n-1} \cos^{2n} x = C_{2n-1}^{n-1} + \sum_{i=n-1}^{i=0} C_{2n}^i \cos 2(n - i)x ; \\ 2^{2n-2} \sin^{2n-1} x = \sum_{i=n-1}^{i=0} (-1)^{i+n-1} C_{2n-1}^i \sin (2n - 2i - 1)x , \\ 2^{2n-1} \sin^{2n} x = C_{2n-1}^{n-1} - \sum_{i=n-1}^{i=0} (-1)^{i+n-1} C_{2n}^i \cos 2(n - i)x . \end{array} \right.$$

Ces identités donnent le développement immédiat d'une puissance quelconque, entière et positive, de $\cos x$ ou de $\sin x$.

APPLICATION I. — Les seconds membres de ces relations, égaux à zéro, fournissent des équations qui n'admettent pour solutions, les deux premières que les solutions de $\cos x = 0$ c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, les deux dernières que les solutions de $\sin x = 0$ c'est-à-dire $x = k\pi$.

APPLICATION II. — De ces mêmes relations, par voie de multiplication, on déduit des identités :

Par exemple, puisque

$$2 \times 2\cos^2 x \times 4\cos^3 x = 16\cos^5 x ,$$

on a

$$2(1 + \cos 2x)(3\cos x + \cos 3x) = 10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x .$$

De même, puisque

$$2 \times 2\sin^2 x \times 4\sin^3 x = 16\sin^5 x ,$$

on a

$$2(1 - \cos 2x)(3\sin x - \sin 3x) = 10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x .$$

APPLICATION III. — On a immédiatement :

$$\left\{ \begin{aligned} 2^{2n-2} \int \cos^{2n-1} x dx &= \sum_{i=n-1}^{i=0} C_{2n-1}^i \frac{\sin(2n-2i-1)x}{2n-2i-1} + \gamma , \\ 2^{2n-1} \int \cos^{2n} x dx &= C_{2n-1}^{n-1} x + \sum_{i=n-1}^{i=0} C_{2n}^i \frac{\sin 2(n-i)x}{2(n-i)} + \gamma ; \\ 2^{2n-2} \int \sin^{2n-1} x dx &= - \sum_{i=n-1}^{i=0} (-1)^{i+n-1} C_{2n-1}^i \frac{\cos(2n-2i-1)x}{2n-2i-1} + \gamma , \\ 2^{2n-1} \int \sin^{2n} x dx &= C_{2n-1}^{n-1} x - \sum_{i=n-1}^{i=0} (-1)^{i+n-1} C_{2n}^i \frac{\sin 2(n-i)x}{2(n-i)} + \gamma , \end{aligned} \right.$$

γ étant une constante arbitraire.

Liège, 1920.