

DEVELOPPEMENT D'UNE PUISSANCE QUELCONQUE, ENTIÈRE ET POSITIVE, DE COS x OU DE SIN x EN FONCTION LINÉAIRE DES COS ET SIN DE MULTIPLES DE x

Autor(en): **Barbette, Edouard**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1920-1921)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515718>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

DÉVELOPPEMENT D'UNE PUISSANCE QUELCONQUE,
ENTIÈRE ET POSITIVE,
DE $\cos x$ OU DE $\sin x$ EN FONCTION LINÉAIRE
DES \cos ET \sin DE MULTIPLES DE x

PAR

Edouard BARBETTE (Liège).

Le développement d'une puissance quelconque, entière et positive, de $\cos x$ ou de $\sin x$ en fonction linéaire des \cos et \sin de multiples de x , repose sur les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — Si l'on a

$$2^{2n-1} \cos^{2n} x = A_0 + A_1 \cos 2x + A_2 \cos 4x + A_3 \cos 6x + \dots \\ + A_{n-2} \cos 2(n-2)x + A_{n-1} \cos 2(n-1)x + A_n \cos 2nx, \quad (1)$$

on a aussi :

$$1^\circ \quad 2^{2n} \cos^{2n+1} x = (2A_0 + A_1) \cos x + (A_1 + A_2) \cos 3x + (A_2 + A_3) \cos 5x + \dots \\ + (A_{n-2} + A_{n-1}) \cos (2n-3)x + (A_{n-1} + A_n) \cos (2n-1)x \\ + A_n \cos (2n+1)x \\ \equiv B_0 \cos x + B_1 \cos 3x + B_2 \cos 5x + \dots + B_{n-2} \cos (2n-3)x \\ + B_{n-1} \cos (2n-1)x + B_n \cos (2n+1)x \quad (2)$$

$$2^\circ \quad 2^{2n+1} \cos^{2n+2} x = B_0 + (B_0 + B_1) \cos 2x + (B_1 + B_2) (\cos 4x + \dots \\ + (B_{n-2} + B_{n-1}) \cos 2(n-1)x + (B_{n-1} + B_n) \cos 2nx + B_n \cos 2(n+1)x.$$

THÉORÈME II. — Si l'on a

$$2^{2n-1} \sin^{2n} x = A_0 - A_1 \cos 2x + A_2 \cos 4x - A_3 \cos 6x + \dots \\ \pm A_{n-2} \cos 2(n-2)x \mp A_{n-1} \cos 2(n-1)x \pm A_n \cos 2nx, \quad (3)$$

on a aussi :

$$\begin{aligned}
 1^{\circ} \quad 2^{2n} \sin^{2n+1} x &= (2A_0 + A_1) \sin x - (A_1 + A_2) \sin 3x + (A_2 + A_3) \sin 5x - \dots \\
 &\pm (A_{n-2} + A_{n-1}) \sin (2n-3)x \mp (A_{n-1} + A_n) \sin (2n-1)x \pm A_n \sin (2n+1)x \\
 &\equiv B_0 \sin x - B_1 \sin 3x + B_2 \sin 5x - \dots \pm B_{n-2} \sin (2n-3)x \\
 &\mp B_{n-1} \sin (2n-1)x \pm B_n \sin (2n+1)x \qquad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^{\circ} \quad 2^{2n+1} \sin^{2n+2} x &= B_0 - (B_0 + B_1) \cos 2x + (B_1 + B_2) \cos 4x - \dots \\
 &\mp (B_{n-2} + B_{n-1}) \cos 2(n-1)x \pm (B_{n-1} + B_n) \cos 2nx \mp B_n \cos 2(n+1)x ,
 \end{aligned}$$

+ ou -, selon que n est pair ou impair.

Ces théorèmes se démontrent facilement en multipliant les deux membres de l'égalité (1), puis de l'égalité (2), par $2\cos x$, — les deux membres de l'égalité (3), puis de l'égalité (4), par $2\sin x$, tout en faisant usage des formules de logarithmisation :

$$\begin{aligned}
 2\sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q) &= \sin p + \sin q , \\
 2\sin \frac{1}{2}(p-q) \cos \frac{1}{2}(p+q) &= \sin p - \sin q ; \\
 2\cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q) &= \cos p + \cos q , \\
 -2\sin \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q) &= \cos p - \cos q .
 \end{aligned}$$

Puisque

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \quad \text{et} \quad 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x ,$$

la loi des coefficients, pris en valeur absolue, des puissances successives donnant $2^{m-1} \cos^m x$ ou $2^{m-1} \sin^m x$, à partir de $m = 2$, se résume en le tableau suivant :

| | | | | | |
|-----|-----|-----|----|----|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | | | | |
| 3 | 4 | 1 | | | |
| 10 | 5 | 1 | | | |
| 10 | 15 | 6 | 1 | | |
| 35 | 21 | 7 | 1 | | |
| 35 | 56 | 28 | 8 | 1 | |
| 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | |
| 126 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |

en sorte que

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$$

$$8\cos^4 x = 3 + 4\cos 2x + \cos 4x$$

$$16\cos^5 x = 10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x$$

$$32\cos^6 x = 10 + 15\cos 2x + 6\cos 4x + \cos 6x$$

et

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$$

$$8\sin^4 x = 3 - 4\cos 2x + \cos 4x$$

$$16\sin^5 x = 10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x$$

$$32\sin^6 x = 10 - 15\cos 2x + 6\cos 4x - \cos 6x$$

De cette loi des coefficients et de la loi des coefficients du binôme de Newton, on déduit les quatre relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^{2n-2} \cos^{2n-1} x = \sum_{i=n-1}^{i=0} C_{2n-1}^i \cos (2n - 2i - 1)x , \\ 2^{2n-1} \cos^{2n} x = C_{2n-1}^{n-1} + \sum_{i=n-1}^{i=0} C_{2n}^i \cos 2(n - i)x ; \\ 2^{2n-2} \sin^{2n-1} x = \sum_{i=n-1}^{i=0} (-1)^{i+n-1} C_{2n-1}^i \sin (2n - 2i - 1)x , \\ 2^{2n-1} \sin^{2n} x = C_{2n-1}^{n-1} - \sum_{i=n-1}^{i=0} (-1)^{i+n-1} C_{2n}^i \cos 2(n - i)x . \end{array} \right.$$

Ces identités donnent le développement immédiat d'une puissance quelconque, entière et positive, de $\cos x$ ou de $\sin x$.

APPLICATION I. — Les seconds membres de ces relations, égaux à zéro, fournissent des équations qui n'admettent pour solutions, les deux premières que les solutions de $\cos x = 0$ c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, les deux dernières que les solutions de $\sin x = 0$ c'est-à-dire $x = k\pi$.

APPLICATION II. — De ces mêmes relations, par voie de multiplication, on déduit des identités :

Par exemple, puisque

$$2 \times 2\cos^2 x \times 4\cos^3 x = 16\cos^5 x ,$$

on a

$$2(1 + \cos 2x)(3\cos x + \cos 3x) = 10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x .$$

De même, puisque

$$2 \times 2\sin^2 x \times 4\sin^3 x = 16\sin^5 x ,$$

on a

$$2(1 - \cos 2x)(3\sin x - \sin 3x) = 10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x .$$

APPLICATION III. — On a immédiatement :

$$\left\{ \begin{aligned} 2^{2n-2} \int \cos^{2n-1} x dx &= \sum_{i=n-1}^{i=0} C_{2n-1}^i \frac{\sin(2n-2i-1)x}{2n-2i-1} + \gamma , \\ 2^{2n-1} \int \cos^{2n} x dx &= C_{2n-1}^{n-1} x + \sum_{i=n-1}^{i=0} C_{2n}^i \frac{\sin 2(n-i)x}{2(n-i)} + \gamma ; \\ 2^{2n-2} \int \sin^{2n-1} x dx &= - \sum_{i=n-1}^{i=0} (-1)^{i+n-1} C_{2n-1}^i \frac{\cos(2n-2i-1)x}{2n-2i-1} + \gamma , \\ 2^{2n-1} \int \sin^{2n} x dx &= C_{2n-1}^{n-1} x - \sum_{i=n-1}^{i=0} (-1)^{i+n-1} C_{2n}^i \frac{\sin 2(n-i)x}{2(n-i)} + \gamma , \end{aligned} \right.$$

γ étant une constante arbitraire.

Liège, 1920.