Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1920-1921)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DEVELOPPEMENT D'UNE PUISSANCE QUELCONQUE, ENTIÈRE ET POSITIVE, DE COS x OU DE SIN x EN FONCTION LINÉAIRE DES COS ET SIN DE MULTIPLES DE x

Autor: Barbette, Edouard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515718

DÉVELOPPEMENT D'UNE PUISSANCE QUELCONQUE, ENTIÈRE ET POSITIVE, DE COS x OU DE SIN x EN FONCTION LINÉAIRE DES COS ET SIN DE MULTIPLES DE x

PAR

Edouard BARBETTE (Liége).

Le développement d'une puissance quelconque, entière et positive, de $\cos x$ ou de $\sin x$ en fonction linéaire des cos et sin de multiples de x, repose sur les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — Si l'on a

$$2^{2n-1}\cos^{2n}x = A_0 + A_1\cos 2x + A_2\cos 4x + A_3\cos 6x + \dots$$
$$+ A_{n-2}\cos 2(n-2)x + A_{n-1}\cos 2(n-1)x + A_n\cos 2nx\ , \qquad (1)$$

on a aussi :

1° $$2^{2n}\cos^{2n+1}x = (2A_0+A_1)\cos x + (A_1+A_2)\cos 3x + (A_2+A_3)\cos 5x + \dots$$
$$+ (A_{n-2}+A_{n-1})\cos(2n-3)x + (A_{n-1}+A_n)\cos(2n-1)x$$
$$+ A_n\cos(2n+1)x$$
$$\equiv B_0\cos x + B_1\cos 3x + B_2\cos 5x + \dots + B_{n-2}\cos(2n-3)x$$
$$+ B_{n-1}\cos(2n-1)x + B_n\cos(2n+1)x \qquad (2)$$

2° $$2^{2n+1}\cos^{2n+2}x = B_0 + (B_0+B_1)\cos 2x + (B_1+B_2)\cos 4x + \dots$$
$$+ (B_{n-2}+B_{n-1})\cos 2(n-1)x + (B_{n-1}+B_n)\cos 2nx + B_n\cos 2(n+1)x\ .$$

THÉORÈME II. — Si l'on a

$$2^{2n-1}\sin^{2n}x = A_0 - A_1\cos 2x + A_2\cos 4x - A_3\cos 6x + \dots$$
$$\pm A_{n-2}\cos 2(n-2)x \mp A_{n-1}\cos 2(n-1)x \pm A_n\cos 2nx\ , \qquad (3)$$

on a aussi :

$$1^\circ \quad 2^{2n}\sin^{2n+1}x = (2A_0 + A_1)\sin x - (A_1 + A_2)\sin 3x + (A_2 + A_3)\sin 5x - \ldots$$
$$\pm (A_{n-2} + A_{n-1})\sin(2n-3)x \mp (A_{n-1} + A_n)\sin(2n-1)x \pm A_n \sin(2n+1)x$$
$$\equiv B_0 \sin x - B_1 \sin 3x + B_2 \sin 5x - \ldots \pm B_{n-2}\sin(2n-3)x$$
$$\mp B_{n-1}\sin(2n-1)x \pm B_n \sin(2n+1)x \qquad (4)$$

$$2^\circ \quad 2^{2n+1}\sin^{2n+2}x = B_0 - (B_0 + B_1)\cos 2x + (B_1 + B_2)\cos 4x - \ldots$$
$$\mp (B_{n-2} + B_{n-1})\cos 2(n-1)x \pm (B_{n-1} + B_n)\cos 2nx \mp B_n \cos 2(n+1)x \ ,$$

$+$ ou $-$, selon que n est pair ou impair.

Ces théorèmes se démontrent facilement en multipliant les deux membres de l'égalité (1), puis de l'égalité (2), par $2\cos x$, — les deux membres de l'égalité (3), puis de l'égalité (4), par $2\sin x$, tout en faisant usage des formules de logarithmisation :

$$2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q) = \sin p + \sin q \ ,$$

$$2\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q) = \sin p - \sin q \ ;$$

$$2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q) = \cos p + \cos q \ ,$$

$$-2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q) = \cos p - \cos q \ .$$

Puisque

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \qquad \text{et} \qquad 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \ ,$$

la loi des coefficients, pris en valeur absolue, des puissances successives donnant $2^{m-1}\cos^m x$ ou $2^{m-1}\sin^m x$, à partir de $m = 2$, se résume en le tableau suivant :

1	1				
3	1				
3	4	1			
10	5	1			
10	15	6	1		
35	21	7	1		
35	56	28	8	1	
126	84	36	9	1	
126	210	120	45	10	1
.	.	.	.	.	.

en sorte que

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$
$$4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$$
$$8\cos^4 x = 3 + 4\cos 2x + \cos 4x$$
$$16\cos^5 x = 10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x$$
$$32\cos^6 x = 10 + 15\cos 2x + 6\cos 4x + \cos 6x$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

et

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$
$$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$$
$$8\sin^4 x = 3 - 4\cos 2x + \cos 4x$$
$$16\sin^5 x = 10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x$$
$$32\sin^6 x = 10 - 15\cos 2x + 6\cos 4x - \cos 6x$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

De cette loi des coefficients et de la loi des coefficients du binôme de Newton, on déduit les quatre relations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} 2^{2n-2}\cos^{2n-1} x &= \sum_{i=n-1}^{i=0} C_{2n-1}^{i} \cos(2n-2i-1)x \ , \\ 2^{2n-1}\cos^{2n} x &= C_{2n-1}^{n-1} + \sum_{i=n-1}^{i=0} C_{2n}^{i} \cos 2(n-i)x \ ; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} 2^{2n-2}\sin^{2n-1} x &= \sum_{i=n-1}^{i=0} (-1)^{i+n-1} C_{2n-1}^{i} \sin(2n-2i-1)x \ , \\ 2^{2n-1}\sin^{2n} x &= C_{2n-1}^{n-1} - \sum_{i=n-1}^{i=0} (-1)^{i+n-1} C_{2n}^{i} \cos 2(n-i)x \ . \end{aligned}\right.$$

Ces identités donnent le développement immédiat d'une puissance quelconque, entière et positive, de $\cos x$ ou de $\sin x$.

Application I. — Les seconds membres de ces relations, égalés à zéro, fournissent des équations qui n'admettent pour solutions, les deux premières que les solutions de $\cos x = 0$ c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, les deux dernières que les solutions de $\sin x = 0$ c'est-à-dire $x = k\pi$.

Application II. — De ces mêmes relations, par voie de multiplication, on déduit des identités :

Par exemple, puisque

$$2 \times 2\cos^2 x \times 4\cos^3 x = 16\cos^5 x ,$$

on a

$$2(1 + \cos 2x)(3\cos x + \cos 3x) = 10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x .$$

De même, puisque

$$2 \times 2\sin^2 x \times 4\sin^3 x = 16\sin^5 x ,$$

on a

$$2(1 - \cos 2x)(3\sin x - \sin 3x) = 10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x .$$

Application III. — On a immédiatement :

$$\left\{\begin{aligned} &2^{2n-2}\int \cos^{2n-1} x dx = \sum_{i=n-1}^{i=0} C_{2n-1}^{i} \frac{\sin(2n-2i-1)x}{2n-2i-1} + \gamma , \\ &2^{2n-1}\int \cos^{2n} x dx = C_{2n-1}^{n-1} x + \sum_{i=n-1}^{i=0} C_{2n}^{i} \frac{\sin 2(n-i)x}{2(n-i)} + \gamma ; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &2^{2n-2}\int \sin^{2n-1} x dx = - \sum_{i=n-1}^{i=0} (-1)^{i+n-1} C_{2n-1}^{i} \frac{\cos(2n-2i-1)x}{2n-2i-1} + \gamma , \\ &2^{2n-1}\int \sin^{2n} x dx = C_{2n-1}^{n-1} x - \sum_{i=n-1}^{i=0} (-1)^{i+n-1} C_{2n}^{i} \frac{\sin 2(n-i)x}{2(n-i)} + \gamma , \end{aligned}\right.$$

γ étant une constante arbitraire.

Liége, 1920.