Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1920-1921)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN THÉORÈME DE CINÉMATIQUE

Autor: Cailler, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515715

SUR UN THÉORÈME DE CINÉMATIQUE

PAR

C. Cailler (Genève).

Considérons, à l'époque t, un point p, un plan ϖ, ou une droite δ, tous trois mobiles. Soient, au bout du temps dt, p', ϖ', δ' leurs nouvelles positions infiniment voisines des premières.

1° La *vitesse* du point (vitesse *ponctuelle*) a pour support la droite qui joint p à p'.

2° La *vitesse* du plan (vitesse *angulaire*) a pour support la droite d'intersection des plans ϖ et ϖ'.

3° Pour obtenir la *vitesse* de la droite (vitesse *linéaire*), on procédera comme suit.

Soit Δ la perpendiculaire commune aux droites δ et δ', P, P' les pieds de cette perpendiculaire, Π et Π' les plans menés par Δ et les deux droites δ et δ' respectivement.

En passant de sa première à sa seconde position, la droite δ exécute autour de Δ un mouvement hélicoïdal infiniment petit dont les composantes translatoire et rotatoire sont identiques, la première, au glissement $\omega'' dt$ qui amène P en P', la seconde, à la rotation $\omega' dt$ qui applique le plan Π sur le plan Π'.

Alors, en premier lieu, le support de la vitesse linéaire de la droite mobile coïncide avec la perpendiculaire Δ; en second lieu, l'extrémité de cette même vitesse sera définie comme égale à la quantité complexe

$$\omega' + \omega'' \varepsilon . \qquad (1)$$

L'imaginaire ε, qui s'introduit ici, doit être traitée dans toutes les formules comme l'est en analyse une différentielle dont les puissances supérieures à la première sont partout négligées. On aura donc, en particulier

$$\varepsilon^2 = 0 \ , \qquad \varepsilon^n = 0 \ ;$$

$$\cos(\omega' + \varepsilon\omega'') = \cos\omega' - \omega''\sin\omega'\varepsilon \ , \qquad \sin(\omega' + \varepsilon\omega'') = \sin\omega' + \omega''\cos\omega'\varepsilon \ .$$

Les définitions ci-dessus pour la vitesse ponctuelle, angulaire et linéaire assimilent cette grandeur, dans les trois cas, à un *vecteur coté* ou *dyname*. A ce point de vue la vitesse linéaire est la plus générale des trois, sa *grandeur*, ou cote du *dyname*, est la quantité complexe $\omega' + \omega''\varepsilon$. Dans le cas de la vitesse angulaire le dyname correspondant devient *réel;* il est purement imaginaire dans le cas de la vitesse ponctuelle.

Les notions précédentes étant acquises, considérons un axe a de l'espace; nous dirons qu'un point p, un plan ϖ, ou une droite δ lui appartiennent si, à l'époque t, le point est situé sur l'axe, le plan contient l'axe, si enfin la droite δ rencontre l'axe a sous un angle droit.

Imaginons que p, ϖ et δ fassent partie d'un corps solide mobile au lieu que l'axe a, auquel ils appartiennent, est fixe dans l'espace absolu.

Nous avons alors le théorème suivant, en quatre parties, dont seule la première est classique.

1° La projection sur a de la vitesse d'un point p, appartenant à a, est la même quel que soit ce point. Soit g'' cette projection constante.

2° La projection sur a de la vitesse angulaire d'un plan appartenant à a est la même quel que soit le plan. Soit g' cette projection constante.

3° La projection sur a de la vitesse linéaire d'une droite δ appartenant à a est la même quelle que soit la droite. Soit g cette projection constante.

4° Entre les quantités g, g', g'' dont la première est complexe et les autres réelles, existe la relation

$$g = g' + g''\varepsilon \ . \tag{2}$$

Pour comprendre l'énoncé de la troisième propriété, qui est la plus générale, il convient d'ajouter ce qui suit.

La *distance* de deux droites telles que a et Δ est égale, par définition, à la quantité complexe $\alpha' + \varepsilon\alpha''$, où α' est l'angle et α'' la plus courte distance qui sépare ces droites. D'une manière plus précise, α' et α'' désignent les composantes du mouvement hélicoïdal fini qui amène l'une des droites sur l'autre[1]. En outre, à l'instar de ce qui a lieu dans le réel, la projection sur un axe a, d'un dyname φ, identique par exemple avec la vitesse linéaire de notre droite δ, s'obtient en multipliant la cote du dyname, par le cosinus de sa distance à l'axe de projection : c'est donc le produit

$$(\omega' + \omega''\varepsilon) \cos (\alpha' + \alpha''\varepsilon) \ . \tag{3}$$

Si on emploie un système coordonné rectangulaire, et que a_1, a_2, a_3 soient les coordonnées complexes de l'axe a, φ_1, φ_2, φ_3 les coordonnées du dyname *vitesse,* on démontre que la dite projection est égale au produit intérieur $(a\varphi) = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3$; elle est donc linéaire relativement à φ. Par contre, si le dyname se décompose en plusieurs autres, la projection du dyname résultant est la somme des projections des composants.

Démontrons maintenant le troisième théorème ci-dessus. C'est ce qui est bien facile, soit par la voie analytique, soit par la voie géométrique. La preuve ne nécessite aucun recours à des propriétés antérieures de la Cinématique du corps solide ; bien plus, elle redonne, en un clin d'œil, l'essentiel de cette théorie.

Suivons la marche analytique. Désignons par b_h les trois coordonnées d'un dyname quelconque b, et employons les notations vectorielles connues.

---

[1] Je laisse ici de côté la détermination des signes, ou des sens, des grandeurs α' et α''. Le lecteur suppléera facilement cette omission.

Il résulte immédiatement de la définition que les composantes φ_h de la vitesse avec laquelle se déplace la droite δ sont égales à

$$\varphi_h = \left[\delta\,,\ \frac{d\delta}{dt}\right]_h\,, \tag{4}$$

d'où l'équation [1]

$$\frac{d\delta_h}{dt} = [\varphi\,,\ \delta]_h\,. \tag{5}$$

Une seconde droite δ', de vitesse φ', donne de même

$$\frac{d\delta'_h}{dt} = [\varphi'\,,\ \delta']_h\,. \tag{5bis}$$

De ces formules (5) et (5′) découle la relation

$$\frac{d}{dt}(\delta_h\delta'_h) = \delta'_h\frac{d\delta_h}{dt} + \delta_h\frac{d\delta'_h}{dt} = \left\{\varphi - \varphi'\,,\ \delta\,,\ \delta'\right\} \tag{6}$$

où l'accolade désigne le déterminant des trois dynames $\varphi - \varphi'$, δ et δ'.

Mais si les deux droites δ et δ' font partie d'un solide, la distance qui sépare ces droites ne varie pas avec le temps, le premier membre de l'équation (6) est nul. Par contre, le déterminant (6) étant égal à zéro, il faut que le dyname $\varphi' - \varphi$ puisse se décomposer en deux autres agissant selon les droites δ et δ'. Autrement dit, λ' et λ étant deux scalaires convenables, on doit avoir

$$\varphi'_h - \varphi_h = \lambda'\delta'_h - \lambda\delta_h\,. \tag{7}$$

Menons la perpendiculaire a, commune à δ' et δ, de sorte que $(a\delta) = (a\delta') = 0$; on conclut de (7)

$$(a\varphi') = (a\varphi) = g\,. \tag{8}$$

[1] Remarquer qu'on ne peut pas remonter de (5) à la formule (4). On a, en posant (5), la conséquence

$$\varphi_h - \delta_h(\varphi\delta) = \left[\delta\,,\ \frac{d\delta}{dt}\right]_h$$

on n'en conclut (4), que si l'on sait d'avance φ perpendiculaire sur δ.

C'est la proposition à démontrer, les deux membres de (8) exprimant les projections sur a des vitesses des droites δ et δ'. La projection sur a ne dépend donc en rien de la droite choisie, pourvu que cette dernière appartienne à a.

L'identité (7), qui s'applique à deux droites *quelconques* appartenant au solide mobile, est fondamentale; on en tire en un instant la conséquence que le mouvement du corps est hélicoïdal.

Prenons en effet une nouvelle droite δ^2; soit φ^2 sa vitesse, on doit avoir, à l'instar de (7)

$$\varphi^2_h - \varphi_h = \lambda^2 \delta^2_h - \mu \delta_h . \qquad (7^{\text{bis}})$$

De là

$$\varphi^2_h - \varphi^1_h = \lambda^2 \delta^2_h - \lambda^1 \delta^1_h + (\lambda - \mu) \delta_h .$$

Mais le résultat doit être du type vectoriel $a\delta^2_h + b\delta^1_h$, il faut donc que $\lambda = \mu$. La vraie forme de (7^{bis}) est donc $\varphi^2_h - \varphi_h = \lambda^2 \delta^2_h - \lambda \delta_h$, et voici la conséquence.

A chaque droite δ, appartenant au corps, est associé un certain scalaire λ, tel que la différence

$$\Phi_h = \varphi_h - \lambda \delta_h , \qquad (9)$$

dans laquelle φ_h représente la vitesse de la droite, est un vecteur constant, indépendant du choix de δ.

Comme φ est nécessairement perpendiculaire sur δ, on a $(\varphi\delta) = 0$; la quantité λ est donc égale à $-(\Phi\delta)$.

Ce vecteur Φ, caractéristique du mouvement instantané, est évidemment identique à l'axe glissant qui définit le mouvement hélicoïdal. En fait, la formule (5) qui donne le mouvement d'une droite quelconque peut s'écrire encore, à cause de (9), sous la forme

$$\frac{d\delta_h}{dt} = [\Phi \, , \, \delta]_h . \qquad (10)$$

D'après cette équation, la droite δ, qui coïncide avec l'axe du dyname Φ, possède une vitesse nulle. De son côté l'équation (9), récrite sous la forme

$$\varphi_h = \Phi_h - \delta_h(\Phi_h \delta_h) = [\delta[\Phi\delta]]_h \tag{11}$$

montre que la vitesse φ de toute droite qui rencontre Φ à angle droit est identique avec Φ. Ces deux remarques démontrent la proposition.

Reprenons un axe a et une droite δ qui lui est perpendiculaire, selon (11), nous avons

$$g = (a_h \varphi_h) = (a_h \Phi_h) \; .$$

La troisième partie du théorème fondamental est retrouvée, car le dernier terme de la relation précédente ne dépend évidemment pas du choix de δ. Mais nous apprenons par surcroît que *la constante* g, *caractéristique des droites perpendiculaires à l'axe* a, *s'obtient en projetant sur cet axe le mouvement instantané du corps.*

En résumé, de l'équation (11) il résulte que le mouvement réel du corps peut se remplacer par deux autres mouvements hélicoïdaux; l'un, égal à $g = (a\Phi)$, s'exécute suivant un axe a choisi à volonté, l'autre f s'opère suivant un certain axe rencontrant le premier à angle droit. Si ce dernier mouvement existait seul, la vitesse d'un point p ou d'un plan ϖ appartenant à a lui serait normale; ces vitesses ponctuelle et angulaire estimées selon a sont donc dues exclusivement à la première composante g.

Ainsi se trouvent démontrées les parties 1°, 2° et 4° du théorème fondamental.

Terminons par les remarques suivantes :

La construction de la vitesse φ d'une droite δ liée au corps se trouve en interprétant la formule (11), ce qui est immédiat.

On formera un trièdre trirectangle dont la première arête soit δ, et dont la seconde soit perpendiculaire d'une part à la droite δ, de l'autre à l'axe instantané glissant. La vitesse cherchée est la troisième arête du trièdre; quant à sa grandeur complexe, elle vaut $\Phi \sin d$, formule dans laquelle d mesure la distance complexe qui sépare les droites d et Φ.

Si donc on connaît les surfaces réglées S_1 et S_2 engendrées par deux droites du corps, comme δ_1 et δ_2, et si l'on sait comment ces surfaces se correspondent arête par arête, on aura pour déterminer, au temps t, la position de l'axe glissant la construction suivante.

Soit à la dite époque δ_1 et δ_2 les deux arêtes correspondantes sur S_1 et S_2. Par les points centraux C_1 et C_2 de ces deux droites, élevons les normales aux surfaces S_1 et S_2, l'axe instantané les rencontrera toutes deux à angle droit.

Cela résulte, en un clin d'œil, ou de la remarque précédente, ou du théorème fondamental lui-même.

L'exposition précédente ne saurait, cela va sans dire, rien ajouter d'essentiel aux éléments de la Cinématique. Elle n'en possède pas moins des avantages évidents au point de vue didactique. C'est d'emblée qu'on aborde le cas général d'un solide quelconque; il suffit ensuite de prendre les droites mobiles qui définissent le solide, ou toutes convergentes en un point fixe, ou toutes normales à un même plan pour voir les moments autour d'un centre, ou parallèles à un plan, se subordonner au cas général de la manière la plus naturelle, sans d'autre simplification que le passage du complexe au réel.