

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	21 (1920-1921)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	COMMENT UN CONSERVATEUR POURRAIT-IL ARRIVER AU SEUIL DE LA MÉCANIQUE NOUVELLE?
Autor:	Levi-Civita, T.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-515707

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

COMMENT UN CONSERVATEUR
POURRAIT-IL ARRIVER
AU SEUIL DE LA MÉCANIQUE NOUVELLE ?¹

PAR

T. LEVI-CIVITA (Rome).

Ils ne sont pas nombreux ceux qui, en politique, aiment à s'appeler purement et simplement conservateurs, parce que conservateur est souvent synonyme de misonéiste. Ce danger n'existe évidemment pas en science. Aucun chercheur ne peut être misonéiste, mais bien des savants peuvent et doivent être conservateurs, car leur mission est de garder avec vigilance un certain patrimoine intellectuel bien consolidé et d'examiner avec un esprit critique sévère tout ce qui pourrait y apporter un changement.

A ce point de vue, je suis heureux de m'adresser à de nombreux conservateurs et je me ferai un devoir d'être circonspect dans cet exposé qui doit vous orienter vers la mécanique nouvelle, pour ne pas éveiller votre méfiance par des bouleversements choquants.

Je me propose de montrer, à travers quelques formules classiques simples et concises, comment un désir légitime de généralisation formelle d'une part et de synthèse de concept de l'autre, rendent plausibles quelques modifications de lois générales, quantitativement très légères, spéculativement considérables, devinées par Einstein et rangées ces

¹ Conférence tenue au Séminaire mathématique de l'Université de Rome, le 8 mars 1919.
Traduction de MM. FERRERO et R. BERNER (Genève), revue par l'auteur.

dernières années par lui-même dans un ordre systématique¹. Il en ressort une explication toute naturelle de plusieurs faits expérimentaux, notamment d'une célèbre expérience d'optique et d'un fait astronomique (déplacement du périhélie de mercure) devant lesquels les anciennes méthodes, auxquelles on doit pourtant l'essor merveilleux de notre science, restaient impuissantes malgré les plus grands efforts.

D'autres collègues vous illustreront prochainement tout cela avec plus de verve. Je dois borner ma tâche à une première initiation.

1. Le principe de Hamilton.

Partons des équations du mouvement d'un point matériel dans un champ conservatif. Soit U la fonction des forces (rapportée à l'unité de masse). Les équations du mouvement, en coordonnées cartésiennes (rapportées à des axes fixes y_1, y_2, y_3) s'écrivent

$$\ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (N)$$

le point superposé indiquant, comme d'habitude, une dérivation par rapport au temps t .

Si l'on désigne par

$$dl_0^2 = \sum_1^3 dy_i^2$$

le carré de l'élément linéaire (parcouru par le mobile dans un temps infiniment petit) et par v la vitesse du point mobile (en valeur absolue), on aura

$$v^2 = \frac{dl_0^2}{dt^2} = \sum_1^3 \dot{y}_i^2.$$

Il est bien connu qu'en posant

$$L = \frac{1}{2} v^2 + U,$$

¹ Voir par exemple les belles leçons professées par M. WEYL à l'Ecole polytechnique de Zurich, recueillies dans *Raum, Zeit und Materie* [Berlin : Springer (2^e édit.), 1919] ; ou, en résumé, les rapports de M. de SITTER [*Monthly Notices*, vol. LXXVI, 1916, pp. 699-728 ; vol. LXXVII, 1916, pp. 155-184 ; vol. LXXVIII, 1917, pp. 3-28] et de M. EDDINGTON [« Report... presented to the Physical Society of London », Fleetway Press, 1918].

les équations (N) peuvent être renfermées dans la formule de variation

$$\delta \int L dt = 0 \quad (\text{H})$$

qui exprime le principe d'Hamilton.

Fixons un instant notre attention sur l'équation (H). Elle implique un intervalle d'intégration (t_0, t_1) qu'on assigne préalablement et arbitrairement. Il y a équivalence parfaite entre ces deux faits : 1° la formule (H) subsiste pour toutes les variations δy_i des y_i , nulles aux limites et du reste arbitraires. 2° sont vérifiées les équations (N) dans le même intervalle.

C'est la conception la plus simple du principe d'Hamilton, dans lequel on ne fait pas varier t , c'est-à-dire on pose $\delta t = 0$.

Sont aussi classiques quelques généralisations dans lesquelles on soumet aussi t à variation avec ou sans liaisons. Nous aurons bientôt à envisager une parmi ces généralisations qui respectent l'équivalence de (H) avec les (N). Mais il convient de faire auparavant quelques remarques. Si on change les coordonnées d'une manière quelconque en substituant aux trois coordonnées cartésiennes y_1, y_2, y_3 des coordonnées curvilignes quelconques ou encore plus généralement trois paramètres de Lagrange x_1, x_2, x_3 liés à y_1, y_2, y_3 par des relations qui peuvent contenir aussi le temps, régulières et réversibles dans le champ considéré,

$$x_h = x_h(y_1, y_2, y_3, t) \quad (h = 1, 2, 3) \quad (\text{T}_3)$$

ou encore sous forme résolue par rapport aux y_i ($i = 1, 2, 3$)

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{T}_3')$$

et si l'on introduit ces expressions dans L , elle devient une fonction $L(x | \dot{x} | t)$ des variables x_h, \dot{x}_h ($h = 1, 2, 3$), t , quadratique (en général non homogène de \dot{x}). Dès qu'on adopte pour L cette expression transformée, la formule (H) continue naturellement à subsister par rapport aux nouvelles variables x , et donne lieu, en effectuant la variation, à trois

équations différentielles équivalentes aux équations (N) et qui ont la forme classique de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_h} - \frac{\partial L}{\partial x_h} = 0 \quad (h = 1, 2, 3). \quad (M)$$

Cette forme présente la propriété remarquable d'être invariante par rapport à un choix quelconque de paramètres de Lagrange x (combinaisons indépendantes des y pouvant éventuellement renfermer le temps).

REMARQUE I (sur la notion d'équations invariantes). La qualification d'invariantes vis-à-vis d'un choix quelconque et par suite aussi d'une transformation des x [de type (T₃)] dernièrement attribuée aux équations du mouvement, ne doit pas être prise dans un sens absolu : c'est-à-dire dans le sens que les équations différentielles restent matériellement inaltérées (sauf un pur changement de symboles), quel que soit le choix des variables, mais dans un sens relatif, c'est-à-dire dans l'acception plus large d'une invariance subordonnée à une certaine fonction (ou à un système de fonctions), *base* des transformations, sur laquelle on effectue directement la substitution imposée par le changement de variables. La base des transformations (T₃) pour les équations de la dynamique est évidemment la fonction L , unique élément dont il faut et il suffit de se procurer l'expression explicite

$$L(x | \dot{x} | t)$$

dans les nouvelles variables x (et leurs dérivées \dot{x}).

En faisant intervenir cet élément auxiliaire, la structure des équations (M) reste toujours la même, quelles que soient les coordonnées de référence.

REMARQUE II (sur la base commune à toutes les équations de la physique mathématique). On notera que c'est encore dans un sens relatif (parfaitement analogue à celui dont on vient de parler) que les équations de la physique mathématique ont un caractère invariant par rapport aux transformations quelconques des coordonnées, qui ne renferment pas le temps. Dans un système de cette forme apparaîtront géné-

ralement certains paramètres physiques avec leurs dérivées par rapport à des coordonnées de l'espace et au temps. Or, d'une manière absolue, le système changera certainement d'aspect (au moins dans la généralité des cas) quand, par exemple, on substituera aux coordonnées cartésiennes les coordonnées polaires. Mais si l'on prend comme base le dl_0^2 (carré de l'élément linéaire de l'espace) à exprimer chaque fois en fonction des coordonnées x auxquelles on veut se rapporter et avec lesquelles on a en général

$$dl_0^2 = \sum_1^3 a_{ik} dx_i dx_k , \quad (\varphi)$$

on fera apparaître la forme différentielle quadratique (φ), ou plus explicitement ses coefficients a_{ik} , et il sera possible d'attribuer au système d'équations une forme qui reste littéralement la même, quel que soit le choix des coordonnées.

REMARQUE III. La base dynamique L implique la base géométrique dl_0^2 .

Des équations (T_3) on obtient, en dérivant par rapport à t ,

$$\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum_1^3 \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \dot{x}_k .$$

D'autre part, les équations (T_3) elles-mêmes, considérées comme formules de transformation de coordonnées, dans lesquelles t figure comme simple paramètre, donnent, par différentiation,

$$dy_i = \sum_1^3 \frac{\partial y_i}{\partial x_k} dx_k .$$

La substitution matérielle de ces dernières en $dl_0^2 = \sum_1^3 dy_i^2$ donne lieu à une forme différentielle quadratique, qu'on a désignée tout à l'heure par (φ).

La substitution analogue des y_i dans $L = \frac{1}{2} \sum_1^3 y_i^2 + U$ conduit naturellement à un résultat du type

$$L_2 + L_1 + L_0 ,$$

$L_2 = \frac{1}{2} \frac{dL_0^2}{dt^2}$ étant du second degré, L_1 du premier degré dans les \dot{x} , et L_0 fonction seulement des x et de t .

De là nous voyons que la base dynamique L implique pour chaque choix spécial des coordonnées, la connaissance des trois termes L_2 , L_1 , L_0 , ou bien équivaut à l'ensemble de trois bases : 1^o une forme quadratique qui à moins du facteur $\frac{1}{2dt^2}$ (constant par rapport aux coordonnées x) n'est que la base géométrique (φ); 2^o une forme linéaire L_1 [qui a trois coefficients analogues aux six a_{ik} de (φ)]; 3^o une fonction $L_0(x|t)$ qui est au fond un dixième et dernier coefficient de L .

On pourrait en tirer quelques conclusions; mais il nous suffira de retenir que la base géométrique est dans tous les cas incluse dans la dynamique (non réciproquement).

2. *Traitemen t au même pied que les coordonnées de l'espace dans l'algorithme variationnel. — Variété analytique V_4 . — Terminologie à quatre dimensions.*

Comme conséquence immédiate des équations (M) de Lagrange, on a l'identité

$$\frac{d}{dt} \left\{ L - \sum_1^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right\} - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 .$$

Ceci posé, imaginons d'attribuer dans l'intervalle (t_0, t_1) à la variable indépendante t , une variation δt nulle aux limites et du reste arbitraire. Puisque, par ce fait, les x_i restent inaltérés pendant que les $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ subissent les accroissements

$$\delta \dot{x}_i = - \dot{x}_i \frac{d\delta t}{dt} ,$$

on voit sans peine que la contribution provenant de la variation de t dans l'équation (H), soit

$$\int_{t_0}^{t_1} L \delta dt + \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \sum_1^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right\} ,$$

peut (en effectuant une intégration par partie) être mise sous la forme

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \delta t \left\{ \frac{\delta L}{\delta t} - \frac{d}{dt} \left(L - \sum_i^3 \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \right\}.$$

C'est zéro, en vertu des équations (M), d'après ce qu'on vient de remarquer.

On peut donc, dans le principe variationnel (H), traiter de la même manière les coordonnées de l'espace x_1, x_2, x_3 et aussi t .

Considérons, par simple convenance de langage, la variété à quatre dimensions V_4 correspondant aux quatre paramètres x_i, t , variété à quatre dimensions dans laquelle sont représentés simultanément l'espace et le temps.

Un système de trois équations

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, 3),$$

c'est-à-dire un mouvement, dans l'interprétation cinématique, donne lieu à une courbe de V_4 , et réciproquement. Une telle courbe s'appelle *ligne horaire*¹, comme généralisation naturelle du diagramme plan par lequel (en portant en abscisses les temps et en ordonnées les espaces parcourus), on a l'habitude de représenter l'allure du mouvement sur une trajectoire préalablement établie. Adoptant cette locution, on peut dire que les courbes intégrales des équations (M) sont l'ensemble des horaires de V_4 , à partir desquelles (les limites restant fixes) s'annule la variation de l'intégrale

$$\int L dt.$$

3. *Le caractère invariant du principe de Hamilton ne peut pas être rapporté à l'espace V_4 .* La transformation la plus

¹ A la vérité, la dénomination plus répandue serait *ligne universelle*, d'après Minkowski, qui s'est servi pour le premier de la représentation à quatre dimensions et des *Weltlinien* d'une manière systématique dans son article « Raum und Zeit » [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, B. 18, 1909, pp. 75-88].

Il me paraît cependant préférable de se rallier à l'usage de la cinématique élémentaire, où l'on appelle précisément *ligne horaire* le diagramme dans le plan (s, t) d'un mouvement curviligne quelconque défini par l'équation $s = s(t)$. Un mouvement dans l'espace, défini par trois équations $x_i = x_i(t)$, donne lieu à un diagramme (à quatre dimensions) parfaitement analogue, et je n'y vois aucune raison pour introduire une locution nouvelle.

générale de paramètres dans V_4 comprend évidemment trois équations du type (T_3) , moyennant lesquelles on substitue aux coordonnées cartésiennes y_1, y_2, y_3 trois combinaisons indépendantes x_1, x_2, x_3 pouvant renfermer aussi t ; et, en outre, une quatrième relation moyennant laquelle on substitue au temps t une dernière combinaison $x_0(y_1, y_2, y_3, t)$ (indépendante des trois précédentes) : ce nouveau paramètre x_0 s'appelle quelquefois *temps local* parce qu'il dépend non seulement du temps ordinaire t , mais encore de la position.

On peut partant se représenter une transformation (T_4) sous l'aspect suivant :

$$\begin{cases} x_0 = x_0(y_1, y_2, y_3, t), \\ (T_3). \end{cases} \quad (T_4)$$

Tant que l'on prend L comme base, la forme de l'intégrale $\int L dt$ n'a évidemment pas un caractère invariant vis-à-vis d'une (T_4) , dt étant en général remplacée par une expression linéaire dans les différentielles des quatre variables x . On pourrait chercher à substituer à la base L quelque chose de plus général ; il serait alors possible d'atteindre le but, mais d'une manière complexe et inféconde, et on perdrait en simplicité de concept et de forme bien plus qu'on ne gagnerait en généralité.

Il n'est, par contre, pas difficile d'arriver à une forme expressive, invariante par rapport à toute (T_4) , en regardant le principe d'Hamilton comme un résultat d'approximation, si grande, bien entendu, que dans les applications courantes non seulement techniques, mais encore astronomiques, on ne rencontre pas des différences sensibles, en admettant, à sa place, un autre principe regardé comme rigoureux. Une telle circonstance se présentera manifestement toutes les fois que les termes correctifs, introduits par le nouveau principe hypothétique, auront, par rapport aux homologues de la théorie ordinaire, un ordre de grandeur non supérieur au centmillionième (10^{-8}).

Voici une réalisation concrète de ce critère.

4. Forme einsteinienne du principe d'Hamilton.

Soit c , une vitesse constante, très grande par rapport à la vitesse maximum atteinte dans les mouvements dont nous nous occupons. D'une manière précise, supposons que les nombres purs

$$\frac{v^2}{c^2} \quad \text{et} \quad \frac{U}{c^2}$$

soient tous deux négligeables par rapport à l'unité. Il en est bien ainsi, dès qu'on suppose c comparable à la vitesse de la lumière, non seulement pour les problèmes ordinaires du mouvement des corps terrestres, mais encore en mécanique céleste. Pour s'en rendre compte, il suffit d'envisager le cas (le plus défavorable) que v soit une vitesse planétaire et U le potentiel newtonien qui la détermine, ce qui fait que U (dans le champ du mouvement de la planète) est sensiblement du même ordre de grandeur que v^2 .

Comme ordre de grandeur de v , on peut admettre 30 km. à la seconde, ce qui convient au mouvement orbital terrestre. c valant en chiffre rond 300 000 km./sec., on aura $\frac{v}{c} \sim 10^{-4}$ et donc

$$\frac{v^2}{c^2} \quad \text{et} \quad \frac{U}{c^2} \sim 10^{-8} .$$

Cela posé, observons d'abord que, δt devant s'annuler aux limites de l'intervalle d'intégration

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt = 0 ,$$

de sorte qu'on peut substituer à L comme fonction sous le signe dans l'équation (H)

$$c^2 - L = c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{U}{c^2} \right) .$$

Entre parenthèses, les termes $-\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$, $-\frac{U}{c^2}$, tout en étant négligeables par rapport à l'unité, sont essentiels pour que le principe variationnel ne se réduise pas à l'identité. Par

contre, les termes d'ordre supérieur pourront être négligés sans plus dans l'approximation convenue. Il sera donc permis d'écrire

$$c^2 - L = c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2U}{c^2}} = c \sqrt{c^2 - v^2 - 2U}$$

et le principe de Hamilton qui, par la remarque précédente, est équivalente à $\delta \int (c^2 - L) dt = 0$, peut, si l'on omet le facteur constant c et si l'on écrit $\frac{dt^2}{dt^2}$ au lieu de v^2 , être remplacé par

$$\delta \int \sqrt{c^2 - \frac{dt^2}{dt^2} - 2U} dt = 0 ,$$

ou bien, en posant

$$ds^2 = (c^2 - 2U) dt^2 - dt^2 , \quad (D)$$

par

$$\delta \int ds = 0 . \quad (H')$$

Puisque, en se rapportant aux coordonnées cartésiennes, dt^2 vaut $\sum_1^3 dy_i^2$, le ds^2 qu'on vient d'introduire est une forme différentielle quadratique quaternaire, indéfinie parce que (même avec des valeurs réelles et infiniment petites de dt , dy_1 , dy_2 , dy_3) il est susceptible de prendre des déterminations soit positives, soit négatives. Il faut en outre avertir que, *dans le domaine des phénomènes que nous considérons, on a toujours $ds^2 > 0$.* Pour s'en convaincre, il suffit de noter que, en mettant en évidence le facteur $c^2 dt^2$ et en remplaçant de nouveau $\frac{dt^2}{dt^2}$ par v^2 , on peut écrire

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{2U}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right) ;$$

et ceci prouve l'assertion, puisque la quantité entre parenthèses est certainement positive, tant que subsistent les limitations quantitatives dont nous sommes partis.

Si on substitue aux arguments t , y_1 , y_2 , y_3 quatre quel-

conques de leurs combinaisons x_0, x_1, x_2, x_3 , en effectuant une (T_4), le ds^2 conserve le caractère de forme quadratique dans les différentielles des variables indépendantes. Les coefficients changeront, on perdra en général la forme orthogonale (absence de termes rectangles); mais de quelque façon que l'on procède, l'expression explicite rentrera dans le type

$$ds^2 = \sum_0^3 g_{ik} dx_i dx_k , \quad (\text{E})$$

les coefficients $g_{ik} = g_{ki}$, au nombre de dix, étant en général fonctions des x .

Il importe essentiellement de retenir qu'en prenant le ds^2 pour base, (H') présente manifestement un caractère invariant par rapport à n'importe quel choix de coordonnées dans V_4 . Cela constitue une supériorité bien remarquable de (H') sur le principe original d'Hamilton.

5. Interprétation pseudo-géométrique.

La forme ds^2 est indéfinie, comme nous l'avons observé tout à l'heure, et a même pour indice d'inertie 3¹. Par extension analytique à travers l'imaginaire, rien n'empêche d'adopter les locutions géométriques, dont on fait habituellement usage quand il s'agit d'une forme quadratique essentiellement positive, en l'interprétant comme carré de la distance de deux points très voisins d'une V_4 .

Les définitions et les équations (non en général les inégalités) de la géométrie différentielle restent alors valables au point de vue analytique, sauf quelques réserves provenant du fait qu'en géométrie infinitésimale, d'après le caractère défini du ds^2 , on peut exclure systématiquement que le ds^2 s'annule, tandis qu'avec un ds^2 indéfini l'éventualité doit être examinée.

Ceci posé, on peut bien dire que le ds^2 d'Einstein [défini par (D), ou, en coordonnées générales, par (E)] établit une détermination métrique en V_4 , et que les géodésiques de cette métrique (courbes qui rendent minimum $\int ds$ sans

¹ Nombre des coefficients négatifs dans une expression canonique (quelconque).

annuler ds) ne sont pas autre chose que les courbes horaires du problème mécanique fondamental.

6. Une application particulière de (H') — Transformations de Lorentz.

Les équations du mouvement sous la forme originale newtonienne (N) impliquent, comme on le sait, l'uniformité du mouvement quand la force est nulle, ou, ce qui revient au même (à moins d'une constante non essentielle), quand $U = 0$. (H) qui équivaut rigoureusement aux (N), définit donc, pour $U = 0$, des mouvements uniformes. Cette propriété continue à subsister aussi pour la nouvelle forme einsteinienne (H') du principe d'Hamilton, qui n'est pourtant pas rigoureusement équivalente aux équations (N). Pour s'en rendre compte, on remarque d'abord que, pour $U = 0$, (D) se réduit à

$$ds_0^2 = c^2 dt^2 - dl_0^2 \quad (D_0)$$

de sorte qu'en se rapportant à des coordonnées cartésiennes et en posant

$$L^* = \sqrt{c^2 - \sum_1^3 \dot{y}_i^2} ,$$

(H'), qui devient

$$\delta \int ds_0 = 0 , \quad (H'_0)$$

peut être écrite

$$\delta \int L^* dt = 0 .$$

Les équations de Lagrange correspondantes, par le fait que L^* ne dépend pas explicitement des y , donnent après coup les trois intégrales premières

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}_i} = \text{constante} \quad (i = 1, 2, 3) ,$$

d'où la constance de tous les \dot{y} , c. q. f. d.

Ceci posé, considérons une catégorie particulière, mais très importante de transformations (T_4) ainsi spécifiées. Du quaterne (t, y_1, y_2, y_3) on passe à un nouveau quaterne

(t', y'_1, y'_2, y'_3) , pour lequel la forme (D_0) du ds_0^2 reste inaltérée : dans le sens, bien entendu, qu'en vertu des formules de transformation on ait identiquement

$$ds_0^2 = c^2 dt^2 - \sum_1^3 dy_i^2 = c^2 dt'^2 - \sum_1^3 dy'^2_i .$$

(H'_0) nous montre alors que, *aussi dans le nouveau quaterné, en considérant t' comme temps et y'_1, y'_2, y'_3 comme coordonnées cartésiennes, le mouvement apparaîtra uniforme.*

De telles transformations furent effectivement construites par Lorentz, de sorte qu'on peut les appeler lorentziennes nous les désignerons brièvement par (Λ) .

M. Marcolongo vous en présentera prochainement une belle illustration vectorielle. C'est lui qui remarqua le premier¹ comment, en posant $\sqrt{-1}ct = y_0$, ce qui fait que ds_0^2 prend la forme euclidienne $- \sum_0^3 dy_i^2$, les transformations

de Lorentz laissent inaltérée la forme $\sum_0^3 dy_i^2$, de sorte que (faisant ici encore abstraction d'un passage à travers l'imaginaire) elles sont实质iellement identiques aux mouvements d'un espace euclidien à quatre dimensions.

Je ferme la parenthèse au sujet de l'existence effective de ces transformations spéciales (Λ) , et je signale un important corollaire. Chaque (Λ) transforme, comme il a été dit, un mouvement uniforme quelconque en un nouveau mouvement également uniforme ; on ne peut cependant pas affirmer que, par l'effet de la transformation, la vitesse reste inaltérée. Mais il y a au moins un cas, dans lequel cette circonstance se présente. Il se rapporte aux mouvements de vitesse c (cette vitesse constante, très grande, que nous avons introduite originairement pour modifier, d'une manière quantitativement insensible, mais théoriquement féconde en conséquences, la formule d'Hamilton).

¹ Dans la note « Sugli integrali delle equazioni della elettrodinamica », *Rendiconti dei Lincei*, ser. 5, vol. XV, 1906, pp. 344-349.

En effet, pour un mouvement de vitesse c (par rapport aux paramètres t, y_1, y_2, y_3) on a évidemment $c^2 = \frac{dl^2}{dt^2}$ et par suite

$$ds_0^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = 0 .$$

Vu l'invariance (non seulement du ds_0^2 , mais encore de la forme spéciale $c^2 dt^2 - \sum_1^3 dy_i^2$ de ce dernier) quand on passe aux nouvelles variables accentuées par une transformation de Lorentz, on a, aussi pour le mouvement transformé, $c^2 dt'^2 - \sum_1^3 dy'_i^2 = 0$, et de là la vitesse c . C. q. f. d.

7. L'optique géométrique sous son aspect le plus élémentaire.

Dans la représentation géométrique des rayons lumineux on admet, comme dans la mécanique newtonienne, un repère absolu. Pour rendre la représentation expressive, imaginons un milieu hypothétique en repos qui constitue comme le support des phénomènes optiques : le soi-disant éther cosmique. Dans les espaces vides de matière pondérable, la lumière se propage en ligne droite avec une vitesse constante c par rapport à l'éther, ou, ce qui revient au même, par rapport à des axes fixes : nous entendons par fixes, immobiles par rapport à l'éther. c est donc la vitesse de la lumière telle qu'elle apparaît à un observateur O, en repos par rapport à l'éther.

Considérons un solide C animé d'un mouvement de translation de vitesse u , et un faisceau de rayons parallèles se propageant dans le même sens que le mouvement.

Par rapport à l'observateur O, le phénomène lumineux (en se bornant à l'aspect cinématique) se présente — nous l'avons rappelé tout à l'heure — comme un certain mouvement uniforme de vitesse c .

En vertu des principes de la cinématique, la vitesse analogue, par rapport à un observateur O' invariablement lié avec C, devrait être $c - u$.

Or (si petit que soit, dans le domaine des vitesses réalisables avec des corps matériels, le rapport $\frac{u}{c}$ et encore plus son carré $\frac{u^2}{c^2}$, qui seul est accessible à un contrôle expérimental effectif) on peut admettre comme sûrement acquis, à la suite d'une expérience classique de Michelson, répétée ultérieurement par d'autres physiciens et récemment, sur de nouvelles bases, par M. Majorana, que la vitesse de propagation est encore c aussi par rapport à O'.

Pour expliquer cette constatation expérimentale, il suffit évidemment que ce qui apparaît macroscopiquement comme une translation d'un corps C doué de vitesse u , soit, dans un stade plus perfectionné de mesure, une transformation (Λ): résultant effectivement de l'étude de ces transformations que chaque translation uniforme ordinaire peut, très sensiblement, être confondue avec une (Λ) (à moins d'un dixmillionième, pourvu que $\frac{u}{c} < 10^{-4}$).

Il s'ensuit que la loi classique de l'optique géométrique (que la propagation est rectiligne, uniforme, de vitesse c), ainsi que les expériences célèbres, auxquelles je faisais allusion un peu plus haut, restent respectées pourvu qu'on admette le principe suivant: la propagation de la lumière (comme le mouvement d'un point matériel en l'absence de forces), est régie par la loi

$$\delta \int ds_0 = 0 \quad (\text{mouvement uniforme}) ;$$

avec la spécification

$$ds_0^2 = 0 \quad (\text{ce qui équivaut à dire mouvement de vitesse } c) ,$$

et la remarque essentielle que le phénomène de la translation des solides doit être conçu comme très légèrement différent de la description cinématique ordinaire, de manière à correspondre à une transformation (Λ). M. Castelnuovo l'a déjà expliqué substantiellement dans une conférence qu'il a donnée ici-même il y a quelques années¹; M. Marcolongo en

¹ « Il principio di relatività e i fenomeni ottici » in *Scientia*, vol. IX, 1911, pp. 64-86.

reparlera prochainement. Quant à moi, il me suffit d'avoir signalé que l'optique géométrique tend, même dans sa forme la plus schématique — non pas simplement par une idéologie mathématique de plus grande généralité, mais par vertu d'expérience — à attribuer une importance fondamentale à la forme quaternaire

$$ds_0^2 = c^2 dt^2 - dl_0^2. \quad (D_0)$$

8. Rapprochement des deux conclusions mécanique et optique. — Induction naturelle concernant la valeur numérique de c et l'optique géométrique dans un champ de force.

Pour les mouvements spéciaux qui correspondent à la propagation de la lumière dans l'éther, en l'absence de circonstances perturbatrices, la forme

$$c^2 dt^2 - dl_0^2$$

joue le rôle de base, et la constante c y a une valeur bien déterminée.

Pour les mouvements usuels (vitesse des planètes au maximum) et sous l'action de forces conservatrices — nous disons en présence de masses données — la forme

$$ds^2 = (c^2 - 2U) dt^2 - dl_0^2 \quad (D)$$

sert de base. Dans cette forme la constante c n'est soumise qu'à la restriction qualitative d'être assez grande, et l'influence des masses modifie quelque peu le coefficient de dt^2 . Si on aspire à l'unité de conception des phénomènes physiques, on en vient naturellement à admettre que, *cæteris paribus*, une même forme différentielle ds^2 domine à la fois le mouvement des points matériels et la marche des rayons lumineux, fonctionnant comme base dans les deux cas. On devra pour cela attribuer à la constante c , dans le cas dynamique général, la valeur qui lui convient dans le phénomène optique susdit. Alors, tout d'abord, en l'absence de circonstances perturbatrices, en particulier de masses à distance sensible, c'est-à-dire si $U = 0$, le ds^2 mécanique s'identifie effectivement avec le ds_0^2 de l'optique limite.

De plus, puisque, quand $U = 0$ (c'est-à-dire en l'absence de masses à distance sensible), on a pu résumer l'optique géométrique, grâce à l'intervention du ds^2 , en deux lois qui se présentent comme limite de lois dynamiques, on est conduit à étendre la même idée au cas où il existe des masses ($U \neq 0$). La propagation de la lumière sera donc gouvernée dans chaque éventualité par les postulats suivants :

1° (comme pour les mouvements matériels). Principe géodésique :

$$\delta \int ds = 0 .$$

2° $ds^2 = 0$, ce qui équivaut à dire qu'il s'agit de mouvements pour lesquels le carré de la vitesse $V^2 = \frac{dl^2}{dt^2}$ vaut

$$V^2 = c^2 - 2U = c^2 \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) .$$

La vitesse V en résulte légèrement différente de c , c'est-à-dire (à moins de termes absolument négligeables) exprimée par

$$v = c \left(1 - \frac{U}{c^2}\right) .$$

On peut résumer les deux postulats en un énoncé géométrique expressif, dû à M. Hilbert¹ :

Dans notre métrique conventionnelle (D) les rayons lumineux sont des géodésiques de longueur nulle.

9. *Courbure des rayons lumineux sous l'action de masses matérielles.*

La présence de la fonction U dans le ds^2 fait naturellement présumer que la trajectoire des rayons lumineux ne sera plus rigoureusement rectiligne, comme pour $U = 0$.

Si nous explicitons les équations différentielles équivalentes au principe variationnel et si nous éliminons dt au moyen de l'équation $ds^2 = 0$, nous définissons les rayons, c'est-à-dire les courbes suivant lesquelles ils se propagent. Celles-ci se trouvent ainsi caractérisées quantitativement

¹ « Die Grundlagen der Physik » (zweite Mitteilung), *Göttinger Nachrichten*, 1917.

d'une manière précise qui nous a été suggérée par la représentation mathématique des phénomènes.

Une confirmation très expressive du passage de l'allure rectiligne à l'allure curviligne, par l'effet d'un champ de force, nous est fournie par des considérations physiques de toute autre nature. Et voici comment.

Dans les corps radioactifs se trouve emmagasinée une quantité énorme d'énergie : il suffit de penser qu'une masse de radium, même petite, est capable de rayonner pendant nombre d'années, sans modification sensible, assez de chaleur pour porter, chaque heure, de 0° au point d'ébullition une masse égale d'eau. Seulement au bout d'un temps très long (plus de 2500 années pour le radium, et, pour d'autres éléments radioactifs, comparable à la durée des époques géologiques) la provision de chaleur tendrait à disparaître. Quoique la radioactivité ne soit pas une propriété générale des corps, elle rend manifeste que (au moins dans quelques cas) la matière renferme une provision énorme d'énergie, et, sous cette forme, la constatation est généralisable par induction à chaque atome de matière pondérable. On peut même faire une évaluation quantitative qui nous engage à prendre comme mesure de cette énergie mc^2 , m étant la masse de la matière dont il s'agit. Il en résulte alors que cette énergie intrinsèque de la matière est d'un ordre de grandeur bien autrement plus considérable que les deux autres formes d'énergie qu'on fait intervenir en mécanique élémentaire, l'énergie cinétique $\frac{mv^2}{2}$ et l'énergie potentielle (ou de position) dépendant de la place que la masse m occupe dans un champ de force. Quoique de beaucoup prépondérante sur ces deux formes, l'énergie intrinsèque peut être ignorée de la mécanique ordinaire précisément à cause de ce caractère intrinsèque, c'est-à-dire par le fait qu'elle reste, au moins sensiblement, invariée par rapport aux phénomènes du mouvement.

La proportionnalité entre masse matérielle et énergie admise, ces deux entités physiques deviennent concomitantes : où il y a de la matière dans le sens ordinaire du mot, il y a

aussi de l'énergie, même (par rapport aux appréciations habituelles en kilogrammètres) beaucoup d'énergie, à cause du facteur c^2 ; et, réciproquement, l'énergie implique la matière, raréfiée parfois à un tel degré qu'on ne puisse pas la déceler par des moyens relativement grossiers (comme les pesées ou autres expériences statiques), mais cependant toujours douée des caractéristiques mécaniques fondamentales de la matière, telles que la gravitation (c'est-à-dire l'aptitude à ressentir l'attraction newtonienne d'autres masses) et l'inertie.

Ceci dit, je rappelle que n'importe quelle théorie physique de la lumière (dans laquelle l'analyse est poussée au delà de la simple schématisation cinématique), qu'il s'agisse de théorie élastique ou de théorie électromagnétique, porte à considérer les rayons lumineux comme des lignes de flux ou, si l'on veut, des trajectoires de l'énergie se propageant le long de celles-ci avec la vitesse c .

D'après la relation précédente de proportionnalité, cela revient à dire que le long des rayons lumineux il y a aussi un flux de matière. Celui-ci est, certainement, dans des proportions tellement réduites que l'ancienne explication corpusculaire ne peut plus se justifier et que, comme première approximation, c'est bien toujours la théorie ondulatoire qui tient le champ; mais il y a quand même flux de matière. Comme celle-ci est soumise à l'attraction newtonienne des masses situées dans le champ, il en résulte la conclusion générale que les rayons se courbent. Du reste, avec les seules prémisses exposées tout à l'heure, on peut aussi passer au quantitatif et former les équations différentielles des rayons. Il suffit de noter que, pour un élément quelconque de notre matière très subtile voyageant le long du rayon avec la vitesse c (ou très rapprochée de c), sont valables (en négligeant dans une première approximation la correction éventuelle à apporter à c) les relations

$$\frac{c^2}{\rho} = \frac{dU}{dn}, \quad \frac{dU}{db} = 0,$$

où n et b désignent les directions (à priori inconnues) de la normale principale et de la binormale au rayon dans un quelconque de ses points, et ρ le rayon de courbure en ce

point. Celles-ci coïncident (dans une première approximation) avec les équations différentielles qu'on déduirait du principe variationnel combiné avec $ds^2 = 0$.

10. Correction einsteinienne des équations de la physique mathématique. — Relativité de la première manière.

Les lois des phénomènes naturels, disons, pour fixer les idées, d'une classe déterminée de phénomènes naturels (par ex. la mécanique des systèmes continus, l'électromagnétisme, la thermodynamique), telles qu'elles se trouvent traduites en équations suivant les théories classiques de la physique mathématique, présentent toutes, comme on l'a déjà dit [n° 1, remarque II], caractère invariant par rapport aux changements quelconques des coordonnées de l'espace, toutes les fois qu'on prend le dl_0^2 spacial comme forme fondamentale, c'est-à-dire comme base de transformation.

Dans ces équations apparaît (à moins qu'il ne s'agisse de phénomènes statiques) aussi le temps t ; mais la variable t ne pourrait être combinée avec les autres, dans une transformation éventuelle, sans que disparaîsse le caractère invariant des équations.

Soit par exemple :

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \dots, \Omega_m = 0 \quad (\Omega)$$

le système qui, suivant le schéma habituel, traduit en équations une théorie physique déterminée. Il y apparaîtra certains paramètres p_1, p_2, \dots, p_n , spécifiques de la théorie, outre (au moins en général) les coordonnées d'espace et de temps. Imaginant le système rapporté à des coordonnées générales x_1, x_2, x_3 , il y apparaîtra ultérieurement les coefficients a_{ik} du carré de l'élément linéaire exprimé au moyen des x :

$$dl_0^2 = \sum_1^3 dy_i^2 = \sum_1^3 a_{ik} dx_i dx_k. \quad (\varphi)$$

Le système (Ω) traduit des relations physico-géométriques et a d'après cela un caractère invariant par rapport aux transformations de coordonnées.

Permettez-moi à ce propos une brève digression, qui pourra vous sembler oiseuse au premier moment, mais qui

est par contre essentielle comme acheminement analytique vers la relativité générale.

Dans les (Ω) interviennent seulement les a_{ik} et leurs dérivées premières : ceci est au moins valable pour les exemples les plus importants auxquels nous pouvons limiter notre discours. La structure des (Ω) , par ce fait, n'est pas subordonnée à l'hypothèse que dl^2 soit euclidien. Les (Ω) peuvent être interprétées, sans demander aucune modification formelle, comme l'extension la plus spontanée, même (avec certaines restrictions) la seule possible, des lois physiques ordinaires à un espace de nature métrique quelconque, c'est-à-dire ayant pour carré de l'élément linéaire une forme différentielle quadratique définie

$$dl^2 = \sum_1^3 a_{ik} dx_i dx_k ,$$

donnée à priori, et par suite en général non-euclidienne, c'est-à-dire non réductible, par un choix opportun de variables, au type élémentaire $\sum_1^3 dy_i^2$.

Cette extension pouvait paraître jusqu'à hier de la métaphysique pure ou tout au moins un médiocre exercice mathématique, parce que rien ne poussait à renoncer à l'hypothèse fondamentale, suggérée par des intuitions primordiales, et mûrie à travers des constatations toujours plus subtiles, que l'espace dans lequel nous vivons soit rigoureusement euclidien. Aujourd'hui il n'en est plus ainsi. Nous verrons même dans un instant quelles sont les opportunités de synthèse de concept qui poussent à reconstruire la philosophie naturelle sur une base plus large, réservant, bien entendu, le jugement définitif sur la reconstruction au moment où l'on pourra regarder suffisants le nombre et l'entité des confirmations que lui apportent les faits.

Je reviens maintenant aux (Ω) pour attirer votre attention sur des modifications qu'il est possible de leur faire subir, ici encore assez radicales dans la conception, mais telles qu'elles n'altèrent pas d'une manière sensible le contenu quantitatif dans le domaine expérimenté jusqu'à maintenant.

Le but est de substituer aux (Ω) autant d'équations

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \dots, \quad R_m = 0, \quad (R)$$

identiques aux mêmes (Ω) dans des conditions statiques (dûment spécifiées), et douées plus généralement de caractère invariant par rapport à toutes les transformations quaternaires de variables indépendantes (non pas seulement les changements de coordonnées). Pour atteindre ce but, il suffit, en dernière analyse, de prendre comme base de transformation, au lieu du dl^2 spacial¹, une forme (quelconque) quaternaire ds^2 , qui se réduise à $-dl^2$ pour $dt = 0$.

Le moyen pour établir effectivement le système (R), en commençant par attribuer la forme la plus indiquée aux (Ω) dont on part, est fourni très facilement par les méthodes du calcul différentiel absolu de Ricci (associées, bien entendu, dans chaque cas, à quelque complément physique). Mais laissons la partie exécutive en nous bornant aux passages conceptuels. Supposant que les (Ω) originaires se rapportent à l'espace euclidien de la physique classique, on peut prendre, par exemple, comme nouvelle base la forme

$$ds_0^2 = c^2 dt^2 - dl_0^2,$$

qui, comme nous l'avons vu, domine l'optique géométrique limite, c'est-à-dire en l'absence de circonstances perturbatrices.

C'est ce qu'on faisait dans la *relativité de la première manière*, dans laquelle — il importe de le noter — la dynamique du point matériel doit être réformée, elle aussi, en se rapportant au ds_0^2 , et non pas de la manière autonome que je vous ai déjà indiquée, suggérée d'une manière si spontanée par le principe d'Hamilton.

Je ne puis passer sous silence, à cause de son importance intrinsèque et historique, le fait très remarquable qu'il existe un système, celui qui régit les phénomènes électromagnétiques dans les milieux impolarisables en repos, pour lequel les équations (R), formées sur la base du ds_0^2 optique, s'iden-

¹ Je dis d'une manière générale dl^2 et non dl_0^2 , parce que l'observation précédente du texte autorise à rapporter les (Ω) à un espace de nature métrique quelconque.

tifient précisément avec les originaires (Ω). Justement cette coïncidence donna la première impulsion à la théorie de la relativité, dans le sens restreint indiqué plus haut, ce qui explique la place prépondérante accordée au point de vue électromagnétique, dans les premières expositions systématiques de la théorie.

Mais revenons à la base de transformation.

Déjà dans cette course rapide à travers les innovations suggérées par le désir de s'affranchir d'un temps absolu dans la dynamique du point matériel, nous avons été amené à substituer au ds_0^2 de l'optique limite un ds^2 un peu plus général

$$c^2 \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) dt^2 - dl_0^2,$$

qui varie dans chaque cas en dépendance du champ de force. On pourrait, dans toute théorie physique, prendre comme base un tel ds^2 dans lequel on tient compte de U, ou bien en substance des masses en présence desquelles ont lieu les phénomènes considérés.

Et il serait ainsi possible de prévoir, et serait fixée quantitativement par les équations (R), une influence (qui se superpose à celle éventuellement envisagée par les théories ordinaires), certainement très petite mais pas rigoureusement nulle, du champ de force dans lequel se déroule la catégorie des phénomènes examinés.

Mais il y a encore un dernier pas à faire pour une synthèse compréhensive de tous les phénomènes..

11. Influence de tous les phénomènes physiques sur les mesures de l'espace et du temps. — Relativité générale.

Il convient de généraliser le critère qui nous a conduit à prendre comme base dynamique et optique le ds^2 à quatre dimensions de la formule (D), sur la nature duquel influe essentiellement la matière environnante (par l'intermédiaire du potentiel U). Spéculativement, le fait que la matière influe permet de penser que non seulement la matière, mais encore toute autre circonstance physique (mouvement, état électrique, efforts locaux, etc.) peut exercer une influence analogue, qui modifie très légèrement (toujours dans l'ordre

de $\frac{U}{c^2}$ au plus, dans les conditions ordinaires) toute la structure du ds^2 (non seulement le coefficient du dt^2). Ceci porte en particulier à la conséquence (vu que pour $dt = 0$, ds^2 se rapporte purement à l'espace) que l'espace géométrique ambiant ne restera pas en général rigoureusement euclidien, comme il fut toujours postulé jusqu'à maintenant dans toute théorie concrète de phénomènes physiques, mais qu'il s'en écartera plus ou moins suivant les influences extérieures. Notons en passant que (pas à trois, mais) à deux dimensions, on a un exemple concret de variabilité de l'élément linéaire suivant les circonstances, en considérant une membrane élastique. Le lien entre la nature du ds^2 , qui englobe les mesures de l'espace et du temps, et l'ensemble des phénomènes constitue le postulat qualitatif de la relativité générale. La traduction quantitative est fournie par les équations de gravitation d'Einstein, qui sont naturellement au nombre de dix, comme les coefficients, *a priori* inconnus, du ds^2 rapporté à des coordonnées générales (cfr. la (E) du n° 4).

Par cet aperçu reste établie une interdépendance entre tous les phénomènes géométriques, cinématiques et physiques. La géométrie et la cinématique cessent d'occuper une place privilégiée parmi les différentes théories physiques dans le sens que l'espace et le temps ne sont plus un simple support immanent et intangible des phénomènes, mais ils en subissent l'influence par l'intermédiaire du ds^2 , à la nature duquel est d'autre part subordonné le cours des phénomènes eux-mêmes. La mécanique de Newton, en introduisant la gravitation universelle, a réalisé une interdépendance générale entre le mouvement de tous les corps pondérables; d'une manière plus générale, la mécanique nouvelle, au moyen des équations des théories physiques particulières, légèrement modifiées, et des équations de la gravitation, lie entre eux tous les phénomènes naturels dans un tableau unitaire. Ce tableau, dès qu'on prend pour base le ds^2 einsteinien qui convient au cas considéré, présente un caractère invariant par rapport à toutes les transformations des quatre paramètres indépendants qui, dans l'ensemble, individualisent la position et le temps.