Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1920-1921)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CALCUL DES RACINES RÉELLES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE OU TRANSCENDANTE PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

Autor: Béritch, Mladen-T.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515714

sur l'unité de longueur, le moment de ses faces est 3, comme on le vérifie immédiatement en prenant ce moment en l'un des sommets. Il en résulte que le volume d'un polyèdre quelconque est mesuré, avec cette unité, par le tiers du moment du système de vecteurs-aires formé par ses faces.

On conçoit facilement que cette théorie peut s'étendre à des volumes de forme quelconque.

CALCUL DES RACINES RÉELLES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE OU TRANSCENDANTE PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

PAR

Mladen-T. BÉRITCH (Belgrade).

Le procédé par approximations successives appliqué à l'extraction de la n^{me} racine d'un nombre réel et indiqué dans une Note précédente[1] peut être, sous certaines conditions, généralisé et appliqué au calcul des racines réelles d'une équation algébrique ou transcendante.

Soit $f(x) = 0$ l'équation donnée, algébrique ou transcendante, dont on cherche une racine réelle simple, que nous désignerons par a. Considérons deux fonctions :

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2 \quad \text{et} \quad \Psi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} .$$

(Ces deux fonctions se réduisent aux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ de la Note citée en remplaçant $f(x)$ par $t^n - A$.)

Supposons que la racine cherchée a soit dans un intervalle (m, M) dans lequel : 1° la fonction $f(x)$ n'a pas de singularités ;

---

[1] M.-T. BÉRITCH, *Enseign. mathém.*, T. XX, 1918, p. 194-198.

2° sa dérivée $f'(x)$ ne s'annule pas; 3° les dérivées $\Phi'(x)$ et $f''(x)$ ne changent pas de signe.

Pour abréger, nous dirons que l'intervalle (m, M) satisfait à la condition (A). Pour $x = a$ on aura

$$\Phi(a) = \Psi(a) = a \; ; \qquad \Phi'(a) = \Phi''(a) = \Psi'(a) = 0 \; ;$$
$$\Phi'''(a) \neq 0 \; , \qquad \Psi''(a) \neq 0 \; .$$

Le point $\mathrm{A}(x = a, \; y = a)$ sera un point d'inflexion de la courbe

$$y = \Phi(x) \tag{φ}$$

à tangente parallèle à l'axe des x, où la courbe traverse sa tangente :

$$\text{en montant si } \; \Phi'''(a) > 0 \; ; \qquad \text{en descendant si } \; \Phi'''(a) < 0 \; .$$

La dérivée $\Phi'(x)$ étant le produit d'un carré par la différence $3f'''^2(x) - f'(x)f'''(x)$, cette différence ne peut pas changer de signe dans l'intervalle (m, M) si celui-ci satisfait à la condition (A); ce signe sera celui de $\Phi'''(a)$. Donc la fonction $\Phi(x)$:

$$\text{ne sera jamais décroissante dans l'intervalle } \; (m, \mathrm{M}) \; \text{ si } \; \Phi'''(a) > 0$$
$$\text{ne sera jamais croissante dans l'intervalle } \; (m, \mathrm{M}) \; \text{ si } \; \Phi'''(a) < 0 \; .$$

Le même point $\mathrm{A}(x = a, \; y = a)$ sera pour la courbe

$$y = \Psi(x) \tag{ψ}$$

$$\text{le maximum si } \; f'(a)f''(a) < 0 \; ; \qquad \text{le minimum si } \; f'(a)f''(a) > 0 \; .$$

Les courbes (φ) et (ψ) seront, dans l'intervalle considéré, d'un côté du point A toutes deux croissantes ou décroissantes, c'est-à-dire elles seront du même côté de la tangente commune en A, ce qui arrivera si $\Phi'(x) . \Psi'(x) > 0$. Au contraire de l'autre côté du point A, où on aura $\Phi'(x) . \Psi'(x) < 0$ l'une des deux courbes sera croissante et l'autre décroissante, c'est-à-dire elles seront des deux côtés opposés de cette tangente commune.

Considérons maintenant la droite

$$y = x \tag{d}$$

qui passe aussi par le point A. Au voisinage du point A, (φ) sera au-dessus de (d) à gauche de A et au-dessous de (d) à droite de A.

On peut facilement construire :

a) la droite (d) ; *b)* la tangente commune (t) au point A, choisi arbitrairement sur (d) ; *c)* deux courbes (φ) et (ψ), qui auront au voisinage du point A la forme de $y = \pm (x - a)^3 + a$ et $y = \pm (x - a)^2 + a$. En combinant les signes $+$ et $-$ on aura quatre figures, que nous omettons.

Donnons à x une valeur x_0 quelconque, proche de la racine cherchée a. La droite $x = x_0$ coupera toutes les quatre lignes : (d), (t), (φ) et (ψ) aux points) : D, T, Φ et Ψ, dont les ordonnées seront désignées par

$$d_0 = x_0 \ , \qquad t_0 = a \ , \qquad \varphi_0 = \Phi(x_0) \qquad \text{et} \qquad \psi_0 = \Psi(x_0) \ .$$

Désignons par ε_1 le signe de $\Phi'(x_0)$ et par ε_2 celui de $\Psi'(x_0)$.

Une discussion facile montre que :

1° Si $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 < 0$ et si le point D ne se trouve pas entre Φ et Ψ, les valeurs φ_0 et ψ_0 seront deux valeurs approchées de la racine cherchée a : l'une par défaut et l'autre par excès.

Les deux valeurs approchées ainsi trouvées; pour appliquer de nouveau le procédé, dans le but de déterminer deux nouvelles valeurs encore plus approchées de a, on peut prendre pour x l'une valeur quelconque, que nous désignerons par x_1, comprise entre les deux valeurs approchées déjà trouvées. Ceci facilite le calcul, car on choisit pour x une valeur commode pour le calcul. On pourra toujours choisir une telle valeur x, que les conditions énoncées plus haut restent.

En continuant ainsi avec chaque valeur choisie pour x, on aura deux suites de valeurs approchées : l'une par défaut et l'autre par excès. Chacune de ces suites converge vers la même limite a.

En choisissant dans l'intervalle φ_n, ψ_n (où $n = 0, 1, 2, \ldots$) pour x une valeur x_{n+1} qui est la plus commode pour le calcul à effectuer, on n'a pas besoin de connaître les nombres φ_n et ψ_n exactement. Il suffit de connaître les chiffres communs à φ_n et ψ_n et les premiers chiffres qui les suivent. On reconnaît le nombre de chiffres à calculer par la valeur de la différence

$$\psi_n - \varphi_n = \Psi(x_n) - \Phi(x_n) = \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]^2$$

que nous désignerons par Δ_n. Soit

$$\frac{1}{10^\lambda} > \Delta_n > \frac{1}{10^{\lambda+1}},$$

les deux nombres φ_n et ψ_n ne pourront différer qu'en $(\lambda+1)^{me}$ décimale. En calculant Δ_n avec telle approximation pour déterminer le nombre λ, on saura d'avance le nombre de décimales communes à deux nombres φ_n et ψ_n.

Puisque φ_n et ψ_n sont les deux valeurs approchées de la racine a, l'une par défaut et l'autre par excès, la racine a aura comme décimales exactes celles qui sont communes à φ_n et ψ_n. Pour savoir deux limites entre lesquelles se trouve la racine, il faut calculer encore une décimale. Donc on calculera ψ_n avec $\lambda + 1$ décimales, on ajoutera $-\Delta_n$ et on aura φ_n. (Quelquefois il est utile de calculer $\lambda + 2$ décimales.)

2° Si $\varepsilon_1 . \varepsilon_2 < 0$ et si le point D se trouve entre Φ et Ψ, les valeurs approchées seront x_0 et

$$\varphi_0 \quad \text{si} \quad \varepsilon_1 < 0\,; \qquad \psi_0 \quad \text{si} \quad \varepsilon_2 < 0\,.$$

On pourra choisir pour x une nouvelle valeur x_1 entre les valeurs approchées, pour laquelle on aura le 1° cas.

Il suffit de connaître les chiffres communs à x_0 et φ_0 ou ψ_0 et le premier chiffre différent qui les suit.

3° Si $\varepsilon_1 < 0$ et $\varepsilon_2 < 0$ les valeurs approchées de a (par défaut et par excès) seront x_0 et celles parmi les deux valeurs φ_0 et ψ_0 qui est la plus proche de x_0. On pourra choisir pour x une nouvelle valeur x_1 entre les valeurs approchées pour laquelle on aura le 1° cas.

4° Si $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$, les conditions précédentes ne conduisent pas à deux valeurs approchées de a. Pour que x_0 soit une valeur approchée de a, il suffit que la condition supplémentaire :

$$f(x_0)\,f'(x_0)[x_0 - \Phi(x_0)] > 0 \qquad (s)$$

soit remplie. Dans ce cas φ_0 sera une valeur approchée de a, plus approchée que x_0.

Si $\varphi_0 < x_0$ on choisira $x_1 < \varphi_0$,
si $\varphi_0 > x_0$ on choisira $x_1 > \varphi_0$.

La valeur choisie x_1 doit être plus commode pour le calcul à effectuer que φ_0 et être dans l'intervalle (m, M). On pourra choisir une telle valeur x_1 qu'il se présente le 1° cas.

Mais si l'intervalle qui contient x_0, x_1 et les valeurs approchées ne satisfaisait pas à la condition (A), ou si le point $x = x_0$ ne satisfaisait pas à la condition supplémentaire (s) dans le 4e cas, on choisira une autre valeur quelconque, qu'on désignera de nouveau par x_0 et on recommencera les calculs.

Exemples. — 1° $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$.

Partons de la valeur $x_0 = -2$. Nous aurons $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ et la condition supplémentaire (s) sera satisfaite. On calculera $\varphi_0 = -1{,}67 > -2$. On choisira $x_1 > \varphi_0$ par exemple $x_1 = -1{,}6$ qui est plus commode que φ_0 pour le calcul à effectuer. Nous aurons $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 < 0$; Δ_1 sera $0{,}002$ $(\lambda = 2)$ et nous aurons deux valeurs approchées de la racine a :

$$\varphi_1 = -1{,}6505 \,, \qquad \psi_1 = -1{,}652 \,.$$

Nous choisirons pour x_2 la valeur $-1{,}651$ qui est la plus commode pour le calcul à effectuer. Nous aurons $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 < 0$ et $\Delta_2 = 0{,}000\,000\,1$ $(\lambda = 6)$, ce qui fournit les deux valeurs approchées : $\varphi_2 = -1{,}6513897$, $\psi_2 = -1{,}6513898$. On connaît ainsi cette racine à 6 décimales exactes : $x = -1{,}651389$.

2° $f(x) = x + \sin x - 1 = 0$.

Partons de la valeur $x_0 = 0{,}5$. On aura $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. La condition supplémentaire (s) étant satisfaite, on aura $\varphi_0 = 0{,}5109 > x_0$, et on choisira pour x une valeur $x_1 > \varphi_0$, on posera par exemple $x_1 = 0{,}511$. On aura $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 < 0$, $\Delta_1 = 0{,}000\,000\,000\,7$ $(\lambda = 9)$ les deux valeurs approchées seront $\varphi_1 = 0{,}510\,973\,559\,8$ et $\psi_1 = 0{,}510\,973\,559\,1$. On connaît ainsi cette racine à 9 décimales exactes :

$$x = 0{,}510\,973\,559 \,.$$