DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515713

2. Egalité. — Deux systèmes de vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{S}'$ sont dits *égaux*, s'ils ont même résultante générale et même moment résultant en un point O : ils ont alors même moment résultant en tout point de l'espace. J'écrirai

$$\vec{S} = \vec{S}' .$$

Un *couple* est formé de deux vecteurs parallèles et de sens contraires ayant même grandeur. Deux couples sont *égaux*, s'ils ont même axe $\vec{G}$. Je représenterai par la notation [G] un couple ayant pour axe le vecteur $\vec{G}$.

3. Addition. — Je désignerai par la notation $\vec{S} + \vec{S}'$ le système formé par les vecteurs du système $\vec{S}$ et ceux du système $\vec{S}'$. Si le système $\vec{S}$ est formé de n vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ... , $\vec{V}_n$, j'écrirai, conformément à cette définition,

$$\vec{S} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_n .$$

Il est évident que si, dans une somme, on remplace un terme par un terme égal (§ 2), on obtient une somme égale à la primitive.

La définition est *commutative* et *associative* [1].

Une première espèce de multiplication.

4. Définition. — J'appelle *produit de première espèce de deux vecteurs* $\vec{U}$ et $\vec{V}$, et je représente par la notation

$$\vec{U} \cdot \vec{V} ,$$

le nombre algébrique, dont la valeur absolue mesure six fois le volume du tétraèdre construit sur les deux vecteurs ; le signe est +, si les deux vecteurs ont le sens direct l'un par rapport à l'autre ; le signe est — dans le cas contraire.

J'appelle *produit de première espèce de deux systèmes de vecteurs* $\vec{S}$ et $\vec{S}'$ et je représente par

$$\vec{S} \cdot \vec{S}'$$

[1] Il est évident que cette définition n'a rien de commun avec celle de la somme géométrique.

la somme algébrique des produits de première espèce de chacun des vecteurs $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_n$ de $\vec{S}$ par chacun des vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_p$ de $\vec{S}'$ [1] :

$$\vec{S}\cdot\vec{S}' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \vec{U}_i\cdot\vec{V}_j \,.$$

PROPRIÉTÉS.

5. *Dans un produit de première espèce, on peut remplacer l'un des facteurs par un système égal.* En effet, le transport d'un vecteur $\vec{U}$ du système $\vec{S}$ en $\vec{U}'$ le long de son support ne modifie évidemment pas la mesure du tétraèdre construit sur ce vecteur et sur l'un quelconque $\vec{V}$ du système $\vec{S}'$. D'autre part, si l'on remplace deux vecteurs $\overrightarrow{AU_1}$, $\overrightarrow{AU_2}$ du système S, ayant la même origine A, par leur somme géométrique $\overrightarrow{AU}$, les trois tétraèdres construits sur l'un quelconque $\overrightarrow{BV}$ des vecteurs de $\vec{S}'$ et sur chacun des vecteurs $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}$ ont même base ABV, la hauteur du troisième est la somme algébrique des deux autres, d'où

$$\overrightarrow{AU_1}\cdot\vec{V} + \overrightarrow{AU_2}\cdot\vec{V} = \overrightarrow{AU}\cdot\vec{V} \,.$$

Ces opérations élémentaires ne modifiant pas la valeur du produit $\vec{S}\cdot\vec{S}'$, la proposition est établie.

6. Le produit de première espèce est évidemment *commutatif:*

$$\vec{S}\cdot\vec{S}' = \vec{S}'\cdot\vec{S} \,.$$

7. Le produit de première espèce est *distributif par rapport à l'addition* (§ 2) :

$$\vec{S}\cdot(\vec{S}' + \vec{S}'') = \vec{S}\cdot\vec{S}' + \vec{S}\cdot\vec{S}'' \,.$$

(Le signe + du second membre est évidemment celui de l'addition algébrique.)

On voit donc que les règles de calcul de ces produits de première espèce sont celles des produits algébriques de deux facteurs.

---

[1] Ce produit de première espèce s'appelle généralement *moment relatif* des deux systèmes. Il est commode de le considérer comme un produit.

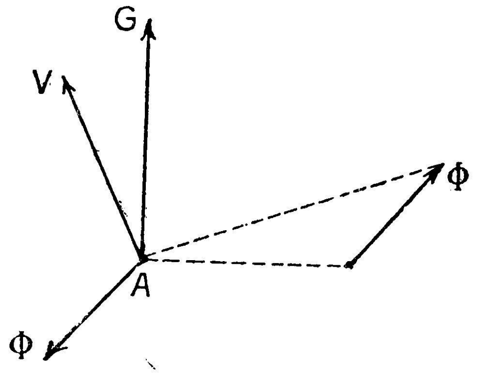
APPLICATIONS.

8. *Le produit de deux vecteurs de même origine est nul.*

9. Si deux vecteurs $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ ont respectivement pour symétriques par rapport à un point ou à un plan deux vecteurs $\vec{\mathrm{U}}'$ et $\vec{\mathrm{V}}'$, on a

$$\vec{\mathrm{U}}\cdot\vec{\mathrm{V}} = -\vec{\mathrm{U}}'\cdot\vec{\mathrm{V}}' .$$

10. *Le produit de deux couples est nul,* car on peut donner à ces deux couples le même centre de symétrie; la propriété résulte alors du § 9.



11. *Le produit d'un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AV}}$ et d'un couple d'axe $\vec{\mathrm{G}}$ est égal au produit scalaire des deux vecteurs $\vec{\mathrm{V}}$ et $\vec{\mathrm{G}}$.* Cette proposition est en évidence si l'on donne à l'un des vecteurs $\vec{\Phi}$, Φ' du couple le point A comme origine. On a alors

$$\vec{\mathrm{V}}\cdot[\mathrm{G}] = \vec{\mathrm{V}}\cdot\vec{\Phi}' .$$

On vérifie immédiatement sur la figure que le tétraèdre construit sur $\vec{\mathrm{V}}$ et $\vec{\Phi}'$ est mesuré par le produit scalaire $\vec{\mathrm{V}}.\vec{\mathrm{G}}$. On a donc

$$\vec{\mathrm{V}}\cdot[\mathrm{G}] = \vec{\mathrm{V}}.\vec{\mathrm{G}} .$$

12. *Produit de deux systèmes $\vec{\mathrm{S}}$ et $\vec{\mathrm{S}}'$ en fonction de leurs éléments de réduction $\vec{\mathrm{R}}$, $\vec{\mathrm{G}}$, $\vec{\mathrm{R}}'$, $\vec{\mathrm{G}}'$ en un même point* O. On a évidemment

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{S}}\cdot\vec{\mathrm{S}}' &= (\vec{\mathrm{R}} + [\mathrm{G}])\cdot(\vec{\mathrm{R}}' + [\mathrm{G}']) .\\ &= \vec{\mathrm{R}}\cdot\vec{\mathrm{R}}' + \vec{\mathrm{R}}\cdot[\mathrm{G}'] + [\mathrm{G}]\cdot\vec{\mathrm{R}}' + [\mathrm{G}]\cdot[\mathrm{G}'] .\end{aligned}$$

En utilisant les §§ 8, 10, 11, on en déduit

$$\vec{\mathrm{S}}\cdot\vec{\mathrm{S}}' = \vec{\mathrm{R}}.\vec{\mathrm{G}}' + \vec{\mathrm{R}}'.\vec{\mathrm{G}} .$$

Si X, Y, Z, L, M, N et X', Y', Z', L', M', N' sont les coordonnées de $\vec{\mathrm{S}}$ et $\vec{\mathrm{S}}'$ par rapport à trois axes rectangulaires issus de O, cette formule s'écrit

$$\vec{\mathrm{S}}\cdot\vec{\mathrm{S}}' = \mathrm{LX}' + \mathrm{MY}' + \mathrm{NZ}' + \mathrm{L}'\mathrm{X} + \mathrm{M}'\mathrm{Y} + \mathrm{N}'\mathrm{Z} .$$

13. *Carré d'un système de vecteurs*. On a, d'après le § 12,

$$\vec{S}^2 = 2\vec{R}.\vec{G} \ .$$

On peut donc exprimer l'égalité d'un système de vecteurs à un vecteur unique ou à un couple en annulant son carré.

APPLICATION AUX COMPLEXES LINÉAIRES.

14. On sait qu'un *complexe linéaire* Γ peut s'identifier avec la famille formée par les droites D de moment nul d'un système de vecteurs $\vec{S}$. Si donc $\vec{V}$ désigne un vecteur porté par l'une de ces droites D, l'équation du complexe s'écrit

$$\vec{V}\cdot\vec{S} = 0 \ . \qquad (1)$$

Les droites du complexe Γ qui rencontrent une droite Δ_1 s'obtiennent en prenant les solutions communes aux équations

$$\vec{V}\cdot\vec{S} = 0 \ , \qquad \vec{V}\cdot\vec{U}_1 = 0 \ , \qquad (2)$$

U_1 désignant un vecteur porté par Δ_1.

L'une de ces équations peut se remplacer par une combinaison des deux :

$$\vec{V}\cdot\vec{S} + \lambda\vec{V}\cdot\vec{U}_1 = 0 \ , \qquad \text{ou} \qquad \vec{V}\cdot(\vec{S} + \overline{\lambda\vec{U}_1}) = 0 \ . \qquad (3)$$

Si je détermine λ par la condition

$$(\vec{S} + \lambda\vec{U}_1)^2 = 0 \ , \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \vec{S}^2 + 2\lambda\vec{S}\cdot\vec{U}_1 = 0 \ , \qquad (4)$$

le système $\vec{S} + \overline{\lambda\vec{U}_1}$ est égal à un vecteur unique $\vec{U}_2$; on est alors conduit à prendre les solutions communes aux équations

$$\vec{V}\cdot\vec{U}_1 = 0 \ , \qquad \vec{V}\cdot\vec{U}_2 = 0 \ . \qquad (5)$$

Les droites du couple Γ qui rencontrent une droite Δ_1 rencontrent donc une deuxième droite Δ_2. Δ_1 et Δ_2 sont dites *conjuguées*.

L'égalité

$$\vec{S} + \lambda\vec{U}_1 = \vec{U}_2 \qquad \text{ou} \qquad \vec{S} = \vec{U}_2 - \lambda\vec{U}_1 \qquad (6)$$

montre qu'on peut réduire le système $\vec{S}$ à deux vecteurs $(-\lambda\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2)$ portés par deux droites conjuguées.

15. On vérifie de même que les droites communes à deux complexes linéaires Γ et Γ' rencontrent deux droites fixes; le système formé par les équations des deux complexes

$$\vec{V}\cdot\vec{S} = 0\ , \qquad \vec{V}\cdot\vec{S}' = 0\ , \tag{7}$$

équivaut, en effet, aux deux équations

$$\vec{V}\cdot(\vec{S} + \lambda_1\vec{S}') = 0\ , \qquad V\cdot(S + \lambda_2 S') = 0\ , \tag{8}$$

λ_1 et λ_2 étant racines de l'équation

$$(\vec{S} + \lambda\vec{S}')^2 = 0\ . \tag{9}$$

16. Soient trois complexes linéaires Γ, Γ', Γ'', définis par trois systèmes de vecteurs $\vec{S}$, $\vec{S}'$, $\vec{S}''$. Il existe une infinité de systèmes de la forme $\vec{S} + \overrightarrow{\lambda'S'} + \overrightarrow{\lambda''S''}$ égaux à un vecteur unique. La condition est, en effet,

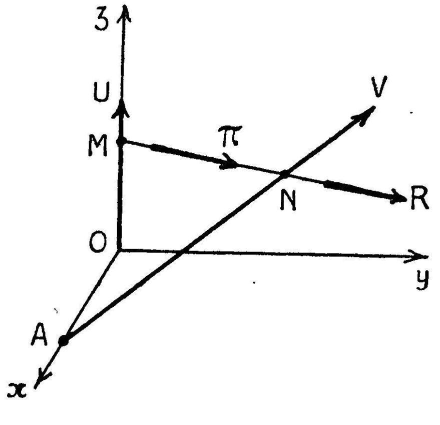
$$(S + \lambda'S' + \lambda''S'')^2 = 0\ , \tag{10}$$

c'est-à-dire

$$\lambda'^2\vec{S}'^2 + 2\lambda'\lambda''\vec{S}'\cdot\vec{S}'' + \lambda''^2\vec{S}''^2 + \ldots = 0\ . \tag{11}$$

Si l'on prend trois solutions $(\lambda'_1, \lambda''_1;\ \lambda'_2, \lambda''_2;\ \lambda'_3, \lambda''_3)$ de cette équation, on obtient ainsi trois systèmes $\vec{S} + \lambda'\vec{S}' + \lambda''\vec{S}''$ réduits respectivement à des vecteurs $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$, $\vec{U}_3$. Les droites communes aux trois complexes rencontrent les trois droites supports de U_1, U_2, U_3. Elles forment donc la moitié d'une quadrique. Les résultantes des systèmes $\vec{S} + \lambda'\vec{S}' + \lambda''\vec{S}''$, qui vérifient l'équation (11), forment l'autre moitié.

Une deuxième espèce de multiplication.



17. Définition. — J'appelle *produit de deuxième espèce de deux vecteurs* $\vec{U}$ et $\vec{V}$, et je désigne par la notation $\vec{U}\times\vec{V}$, le système de vecteurs $\vec{P}$ défini de la manière suivante :

Son axe central est la perpendiculaire commune MN à $\vec{U}$ et $\vec{V}$.