

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 21 (1920-1921)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE  $f[\phi_1(t)] = f[\phi_2(t)]$   
**Autor:** Wavre, Rolin  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515723>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$17 \times 41$	»	43,	au nombre de	1 ;
$19 \times 23$	»	29, 31, . . . . ., 67,	»	10 ;
$19 \times 29$	»	31, 37, . . . . ., 53,	»	6 ;
$19 \times 31$	»	37, 41, 43, 47,	»	4 ;
$19 \times 37$	»	41,	»	1 ;
$23 \times 29$	»	31, 37, 41, 43,	»	4 ;
$23 \times 31$	»	37, 41,	»	2 ;

en tout, 71 produits.

Par suite,  $\beta = 2385 + 61 + 71 = 2517$ ; de 1 à 30 030, il y a donc  $\varphi(N) + \alpha - \beta = 5760 + 6 - 2517 = 3249$  nombres premiers.

Liége, 1920.

---

## SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE

$$f[\varphi_1(t)] = f[\varphi_2(t)]$$

PAR

Rolin WAVRE (Neuchâtel).

---

A la quinzième réunion<sup>1</sup> de la Société mathématique suisse, tenue à Neuchâtel le 31 août 1920, M. le Prof. PLANCHEREL a posé la question d'analyse suivante :

« Soit  $y = f(x)$  une courbe continue et univoque dans l'intervalle  $a \leqq x \leqq b$ , telle que dans cet intervalle  $f(x) \geqq 0$  et que  $f(a) = f(b) = 0$ . Soient  $M_1, M_2$ , deux points mobiles sur cette courbe, assujettis à avoir à chaque instant  $t$  les mêmes ordonnées. A l'instant  $t = 0$ ,  $M_1$  se trouve au point  $(a, 0)$ ,  $M_2$  au point  $(b, 0)$ . Peut-on coordonner les mouvements de ces deux points de manière à ce qu'ils se rencontrent? »

M. Plancherel ajoute :

« Le problème est équivalent à la détermination de deux fonc-

---

<sup>1</sup> Voir *L'Enseignement mathématique*, N°s 3-4, t. XXI, p. 226-227; 1920.

tions  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  continues dans l'intervalle  $0 \leq t \leq 1$ , telles que pour  $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} a &\leq \varphi_1(t) \leq b, \quad a \leq \varphi_2(t) \leq b \\ f[\varphi_1(t)] &= f[\varphi_2(t)] \end{aligned} \quad (1)$$

et que, pour  $t = 0$

$$\varphi_1(0) = a, \quad \varphi_2(0) = b$$

et pour  $t = 1$

$$\varphi_1(1) = b, \quad \varphi_2(1) = a.$$

« Si  $f(x)$  n'a qu'un nombre fini d'extréma dans  $(a, b)$ , la résolution du problème est immédiate. Il s'agirait de savoir si la seule hypothèse de la continuité de  $f(x)$  est suffisante pour assurer la possibilité du problème; si non, quelles conditions supplémentaires devraient être ajoutées. »

*Je montrerai ici que la seule hypothèse de la continuité de la fonction  $f(x)$  est suffisante.*

Le principe de ma démonstration est fondé sur le fait que l'on peut former une suite de fonctions  $f_n(x)$  convergeant uniformément vers  $f(x)$  pour lesquelles la résolution de l'équation fonctionnelle

$$f_n[\varphi_1^{(n)}(t)] = f_n[\varphi_2^{(n)}(t)] \quad (2)$$

est possible. De la suite des fonctions

$$\varphi_1^{(n)}(t) \quad \varphi_2^{(n)}(t) \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

attachées à chaque  $f_n(x)$ , on pourra extraire deux fonctions limites satisfaisant à l'équation (1).

1. — *Remarque préliminaire.* — Soit  $y = f(x)$  une fonction continue et univoque telle que

$$f(0) = 0 \quad f(1) = 0 \quad f(x) > 0 \quad (0 < x < 1)$$

et qui n'ait qu'un nombre fini d'extréma.

La résolution du problème étant possible pour une telle fonction, on pourra toujours choisir un mouvement des deux points  $M_1$  et  $M_2$  tel que ces deux points ne se trouvent jamais à deux instants différents en deux mêmes points de la courbe.

Il en résulte que le nombre de fois où un des points se trouve en un point  $M$  de la courbe au cours du mouvement,

est au plus égal au nombre de points de la courbe ayant même ordonnée que  $M$ .

Si l'on fait l'hypothèse conforme à la nature de la question, que la fonction envisagée n'est constante dans aucun intervalle, ce nombre de points est nécessairement borné, quel que soit  $M$  sur la courbe.

2. — *Définition.* — Je dis qu'une courbe continue *traverse* un intervalle  $(x = x_q, x = x_{q+1})$  ou  $(y = y_q, y = y_{q+1})$  d'un point  $a$  à un point  $b$  de la courbe lorsque tous les points de la courbe situés entre  $a$  et  $b$  sont à l'intérieur de l'intervalle;  $a$  et  $b$  extrémités de la traversée sur la courbe étant sur les deux frontières opposées de l'intervalle.

En tenant compte des propriétés d'une fonction continue, on verra que cette définition a un sens parfaitement bien défini.

Pour fixer les idées, je donnerai l'exemple de la courbe donnée par le dessin suivant :

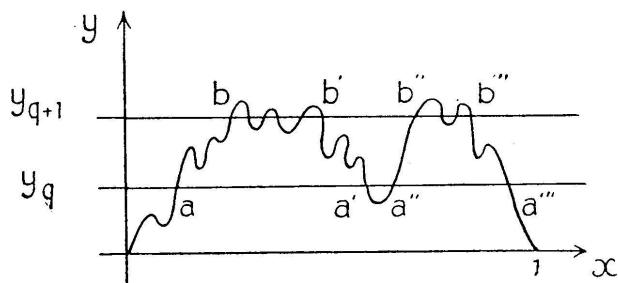


Fig. 1.

courbe qui traverse l'intervalle  $(y_q, y_{q+1})$ , dans les intervalles sur la courbe

$$(a, b) \quad (a', b') \quad (a'', b'') \quad (a''', b''')$$

3. — Soit une fonction continue  $y = f(x)$  n'ayant qu'un nombre fini d'extrêmes et satisfaisant aux conditions aux limites.

Résolvons le problème, puis considérons un intervalle  $(x_q, x_{q+1})$  quelconque, et l'intervalle  $(y_q, y_{q+1})$ , où  $y_q$  et  $y_{q+1}$  désignent la borne inférieure et la borne supérieure de  $f(x)$ .

dans l'intervalle fermé  $(x_q, x_{q+1})$ . On sait, en vertu d'un théorème classique, que ces bornes sont effectivement atteintes dans l'intervalle fermé.

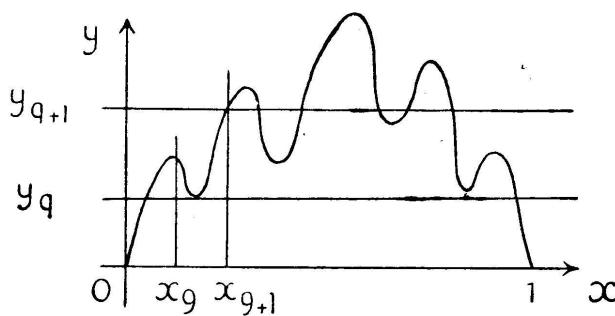


Fig. 2.

*Lemme.* — Pour que l'un des deux points  $M_1, M_2$  traverse l'intervalle  $(x_q, x_{q+1})$ , il faut que l'autre point traverse l'intervalle  $(y_q, y_{q+1})$  correspondant, au moins une fois.

C'est immédiat.

*THÉORÈME.* — *Etant donné une courbe  $f(x)$  n'ayant qu'un nombre fini d'extrêmes, le nombre de fois qu'un des mobiles traverse un intervalle quelconque  $(x_q, x_{q+1})$  est au plus égal au nombre de fois où la courbe traverse l'intervalle correspondant  $(y_q, y_{q+1})$ .*

En effet : chaque fois que l'un des mobiles traverse  $(x_q, x_{q+1})$ , l'autre traverse  $(y_q, y_{q+1})$ , mais si le nombre des traversées de  $(x_q, x_{q+1})$  était supérieur à celui des traversées de  $(y_q, y_{q+1})$ , il y aurait au moins une traversée de l'intervalle  $(y_q, y_{q+1})$  faite dans  $(x_q, x_{q+1})$  qui correspondrait à deux traversées de l'intervalle  $(y_q, y_{q+1})$  faites sur le même intervalle  $(a, b)$  de la courbe.

Mais les bornes inférieure et supérieure se correspondent, les mobiles occuperaient, à deux instants différents, la même position, ce qui doit être écarté en vertu de la remarque préliminaire.

**4.** — Considérons une fonction continue  $f(x)$  qui n'est, constante dans aucun intervalle, telle que :

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(x) \geq 0 \quad 0 \leq x \leq 1.$$

pour laquelle nous chercherons à résoudre le problème.

Soit d'autre part une suite infinie de polynômes qui converge uniformément vers  $f(x)$  :

$$P_1(x), \quad P_2(x), \dots, \quad P_n(x), \dots$$

dont l'existence est assurée par un théorème classique de Weierstrass.

*Lemme I.* — La fonction  $f(x)$  ne traverse qu'un nombre fini de fois un intervalle quelconque  $(y_q, y_{q+1})$ .

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait au moins une abscisse  $x_0$  au voisinage de laquelle la courbe traversant l'intervalle une infinité de fois ne saurait être continue.

*Lemme II.* — Chaque polynôme d'approximation  $P_n(x)$  ne traverse l'intervalle qu'un nombre de fois inférieur à un nombre fini.

Ceci se démontrerait aisément en toute rigueur en tenant compte que  $f(x)$  ne traversant qu'un nombre fini de fois l'intervalle, il en est de même pour tout polynôme  $P_n(x)$ , compris dans l'aire limitée par

$$f(x) + \varepsilon \quad \text{et} \quad f(x) - \varepsilon \quad 0 \leq x \leq 1$$

pourvu que  $\varepsilon$  soit assez petit, c'est-à-dire à partir d'un  $n$  assez grand.

5. — *Construction des fonctions  $\varphi$ .* — Je considère la courbe  $f_n(x)$  formée de la partie de  $P_n(x)$  qui est située entre les droites  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ , et des parties de ces droites qui joignent les points où la courbe les coupe aux points  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  respectivement de manière que  $f_n(x)$  satisfasse aux conditions aux limites.

Pour une telle fonction  $f_n(x)$  qui n'a évidemment qu'un nombre fini d'extrêmes, la résolution de l'équation fonctionnelle

$$f_n[\varphi_1^{(n)}(t)] = f_n[\varphi_2^{(n)}(t)]$$

est possible.

J'adopterai pour la construction des  $\varphi^{(n)}(t)$  le mode de représentation suivant :

Je porte en abscisse la longueur  $l$  du chemin parcouru dans le mouvement de chaque point (qu'il ne faut pas confondre

avec la longueur de la trajectoire géométrique) et en ordonnée les  $x$  correspondants.

(Pour une courbe  $f_n(x)$ , la longueur du chemin parcouru est nécessairement finie, de plus on a toujours

$$\frac{\Delta x}{\Delta l} \leq 1$$

les longueurs totales des mouvements des deux points sont les mêmes.)

J'obtiens ainsi deux courbes

$$\Phi_1^{(n)}(l) \quad \Phi_2^{(n)}(l)$$

données par deux fonctions continues et univoques.

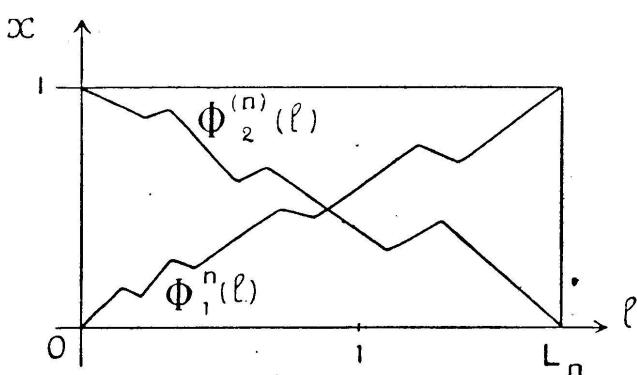


Fig. 3.

Puis j'opère la même construction pour toutes les fonctions  $f_n(x)$ . J'obtiens ainsi deux suites infinies de fonctions

$$\Phi_1^{(n)}(l) \quad \Phi_2^{(n)}(l) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

6. — Il résulte du théorème du § 3 et du lemme II du § 4 le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le nombre de fois qu'une fonction  $\Phi_1^{(n)}(l)$  traverse un intervalle quelconque  $(x_q, x_{q+1})$  est inférieur, quel que soit n, à une borne finie.*

Je vais montrer que l'on peut déduire des deux suites de fonctions

$$\Phi_1^{(n)}(l) \quad \Phi_2^{(n)}(l) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

deux autres suites

$$\varphi_1^{(n)}(t) \quad \varphi_2^{(n)}(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

qui satisfont aux équations fonctionnelles

$$f_n[\varphi_1^{(n)}(t)] = f_n[\varphi_2^{(n)}(t)]$$

avec les conditions aux limites, et qui forment deux suites de fonctions également continues dans l'intervalle  $0 \leq t \leq 1$ . Pour cela je considère une division de l'intervalle  $(0, 1)$  de l'axe des  $x$  en  $p$  parties égales par les points

$$0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, 1.$$

Il y correspond pour chaque  $f_n(x)$  des intervalles

$$(y_1'^n, y_1''^n), (y_2'^n, y_2''^n), \dots, (y_p'^n, y_p''^n)$$

par la règle exposée au § 3.

On verrait aisément en vertu de la convergence uniforme des  $f_n(x)$  vers une fonction continue  $f(x)$  qui n'est constante dans aucun intervalle, qu'il existe un nombre positif  $\lambda_p$  tel que

$$|y_q''^n - y_q'^n| > \lambda_p$$

quels que soient  $n$  et  $q$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) ( $q = 1, 2, 3, \dots p$ ).

Il y aurait une exception pour les parties des  $f_n(x)$  qui coïncident avec l'axe des  $x$ , mais cette restriction étant très facile à lever, je n'en tiendrai nullement compte ; on lèverait aussi facilement la restriction qui provient du fait que les  $f_n(x)$  peuvent prendre des valeurs négatives dans l'intervalle  $0 \leq x \leq 1$ .

Je marque sur chaque courbe  $\Phi_1^{(n)}(l)$  les points  $\Sigma_r^{(n)} p$  extrémités d'intervalle où ces courbes traversent les intervalles

$$(0x_1), (x_1x_2), \dots, (x_{p-1}1).$$

En vertu du théorème du § 6, ces points sont en nombre fini sur chaque courbe ( $r = 1, 2, \dots R_n$ ) et ces nombres  $R_n$  sont bornés par un nombre que j'appellerai  $N_p$ ,

$$R_n < N_p.$$

Je divise d'autre part l'intervalle  $(0, 1)$  de l'axe des  $l$  en  $N_p$  parties égales par des points

$$0 \ t_1 \ t_2 \ \dots \ t_r \ \dots \ t_{N_p-1} \ 1.$$

Je déforme la courbe  $\Phi_1^{(n)}(l)$  par *glissement* de manière que chaque point reste à la même hauteur, que  $(0, 0)$  se corresponde à lui-même, que  $(L_n, 1)$  vienne en  $(1, 1)$ , que chaque  $\sum_r^{(n)} p$  ait pour abscisse un  $t_r$  et que la courbe reste continue et univoque.

J'obtiens ainsi une fonction continue que je désignerai par

$$\Phi_1^{(n)}(t) \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Puis je divise l'intervalle  $(0, 1)$  en  $2p$  parties égales. Il y correspond un nouveau nombre  $N_{2p}$ , j'effectue un nouveau glissement de la courbe  $\Phi_1^{(n)}(t)$  qui laisse inaltérés les points  $\sum_r^{(u)} p$  et qui fasse passer tous les nouveaux points  $\sum_r^{(n)} 2p$  extrémités d'intervalle de traversée au-dessus d'abscisses obtenues en divisant chaque intervalle  $(t_r, t_{r+1})$  en  $N_{2p}$  parties égales et cela de manière que la nouvelle courbe ainsi obtenue

$$\Phi_1^{(n)}(2p t)$$

soit univoque et continue.

Je répète cette opération de dichotomie et les glissements correspondants une infinité de fois, ce qui donne une infinité de fonctions

$$\Phi_1^{(n)}(2^q p t) \quad (q = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

On verrait aisément, que ces fonctions convergent uniformément vers une fonction continue  $\varphi_1^{(n)}(t)$ , comme cela résulte de leur construction même.

La même opération effectuée pour tous les  $n$  fournit une suite infinie de fonctions

$$\varphi_1^{(n)}(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad 0 \leq t \leq 1.$$

qui n'ont chacune, comme les fonctions correspondantes  $\Phi_1^{(n)}(l)$ , qu'un nombre fini d'extrêmes.

Je puis donc en déduire par les équations fonctionnelles

$$f_n[\varphi_1^{(n)}(t)] = f_n[\varphi_2^{(n)}(t)]$$

une suite

$$\varphi_2^{(n)}(t) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

les  $\varphi_1^{(n)}(t)$  et  $\varphi_2^{(n)}(t)$  satisfaisant aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(n)}(0) &= 0, & \varphi_2^{(n)}(0) &= 1, \\ \varphi_1^{(n)}(1) &= 1, & \varphi_2^{(n)}(1) &= 0. \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

7. — THÉORÈME. — *Les fonctions  $\varphi_1^{(n)}(t)$ ,  $\varphi_2^{(n)}(t)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) sont également continues.*

En effet, pour que

$$|\varphi_1^{(n)}(t_1) - \varphi_1^{(n)}(t_2)| < \frac{3}{2^q \cdot p}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

il suffit, en vertu du mode de construction des  $\varphi_1^{(n)}(t)$ , que

$$|t_1 - t_2| < \frac{1}{N_p N_{2p} \dots N_{2^q p}}.$$

Je dis que l'on a aussi

$$|\varphi_2^{(n)}(t_1) - \varphi_2^{(n)}(t_2)| < q, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

pour

$$|t_1 - t_2| < \varepsilon.$$

Pour le démontrer, j'utiliserais l'équation fonctionnelle (2) qui donne

$$f_n[\varphi_1^{(n)}(t_1)] - f_n[\varphi_1^{(n)}(t_2)] = f_n[\varphi_2^{(n)}(t_1)] - f_n[\varphi_2^{(n)}(t_2)], \quad (4)$$

mais en vertu de l'égale continuité des  $\varphi_1^{(n)}(t)$  et de la convergence uniforme des  $f_n(x)$ , le premier membre peut être rendu inférieur à  $r$ , si petit que soit  $r$ , pourvu que  $|t_1 - t_2| < \varepsilon$ .

On a donc sous cette même condition

$$f_n[\varphi_2^{(n)}(t_1)] - f_n[\varphi_2^{(n)}(t_2)] < r,$$

ceci exige, en vertu de la convergence uniforme des  $f_n(x)$

vers une fonction continue qui n'est constante dans aucun intervalle, que l'on ait aussi

$$|\varphi_2^{(n)}(t_1) - \varphi_2^{(n)}(t_2)| < q_r,$$

$q_r$  tendant vers zéro avec  $r$ .

Le théorème est donc démontré. L'égale continuité des  $\varphi_2^{(n)}(t)$  apparaitra peut-être mieux en employant la démonstration suivante :

Si les  $\varphi_2^{(n)}(t)$  n'étaient pas également continues, on pourrait trouver  $q$ , telle que pour une suite

$$\varphi_2^{nq}(t)$$

convenablement choisie de fonctions  $\varphi_2^{(n)}(t)$  et une suite d'intervalles  $\Sigma_{nq}$ , dont la longueur tende vers zéro lorsque  $q$  augmente indéfiniment, on ait :

$$|\varphi_2^{nq}(\tau) - \varphi_2^{nq}(\tau')| > q \quad (q = 1, 2, 3, \dots)$$

pour deux valeurs  $\tau$  et  $\tau'$  de  $t$  dans  $\Sigma_{nq}$ .

L'égalité (4) donne

$$\begin{aligned} \max_{\tau \text{ et } \tau' \text{ dans } \Sigma_{nq}} & \left| f_{nq}[\varphi_1^{nq}(\tau)] - f_{nq}[\varphi_1^{nq}(\tau')] \right| \\ & = \max_{\tau \text{ et } \tau' \text{ dans } \Sigma_{nq}} \left| f_{nq}[\varphi_2^{nq}(\tau)] - f_{nq}[\varphi_2^{nq}(\tau')] \right| \end{aligned}$$

mais lorsque  $q$  augmente indéfiniment, le premier membre tend vers zéro, tandis que le second reste supérieur à une borne non nulle.

8. — Ceci étant, en vertu d'un théorème connu, on peut extraire de la suite des  $\varphi_1^n(t)$  une suite  $\varphi_1^s(t)$  qui converge uniformément vers une fonction continue  $\varphi_1(t)$ .

De la suite correspondante  $\varphi_2^{(s)}(t)$ , on peut également déduire une suite  $\varphi_2^{(m)}(t)$ , qui converge uniformément vers une fonction continue  $\varphi_2(t)$ , soit  $\varphi_1^{(m)}(t)$  la suite correspondante des fonctions  $\varphi_1^{(n)}(t)$ .

Je dis que les fonctions  $\varphi_1(t)$  et  $\varphi_2(t)$  satisfont à l'équation (1).

En effet, on peut passer à la limite sur l'équation

$$f_m[\varphi_1^{(m)}(t)] = f_m[\varphi_2^{(m)}(t)] , \quad (5)$$

c'est-à-dire que l'on a

$$f[\varphi_1(t)] = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m[\varphi_1^{(m)}(t)] = \lim_{m \rightarrow \infty} [\varphi_2^{(m)}(t)] = f[\varphi_2(t)] \quad 0 \leq t \leq 1 ,$$

et les conditions aux limites énoncées dans la question sont satisfaites.

Le problème est donc résolu dans toute sa généralité. La seule hypothèse de la continuité est suffisante. La solution pourrait d'ailleurs dans certains cas dépendre du choix des suites  $\varphi^{(m)}$  et n'être pas unique.

9. — La solution du problème précédent permet de répondre à la question suivante comme me l'a obligéamment fait remarquer M. Plancherel.

Soit  $C$  une courbe fermée sans points multiples,  $\lambda$  une direction. Il existe deux droites  $\lambda_1, \lambda_2$  de direction  $\lambda$  telles que  $C$  soit contenue dans la bande  $(\lambda_1, \lambda_2)$  et que cette bande soit de largeur minimum.  $C$  et  $\lambda_1$  ont en commun au moins un point  $A_1$ ,  $C$  et  $\lambda_2$  au moins un point  $A_2$ . Soient  $a_1, a_2, a_3 \dots$ , les intersections d'une droite  $\lambda$  quelconque avec  $C$  et soit  $a_{ik}$  le milieu du segment  $a_i, a_k$ .

Appelons *médiane* relative à la direction  $\lambda$  le lieu des  $a_{ik}$ . Cette médiane peut se composer de plusieurs arcs séparés. Démontrer qu'il existe un arc de médiane joignant  $A_1$  et  $A_2$ .

En représentant par  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  la courbe  $C$  et prenant  $A_1$  comme origine et  $\lambda_1$  comme axe des  $x$ , on aura  $\psi(0) = \psi(1) = 0$ ,  $\psi(t) \geq 0$ , et la question est ramenée au problème primitif.

L'existence d'au moins une médiane joignant  $A_1$  et  $A_2$  est donc démontrée.

10. — Je voudrais, pour terminer, expliciter de la démonstration précédente quelques propriétés générales du procédé de « glissement » qui pourraient intervenir dans une catégorie de problèmes du même genre.

*Remarque.* — On se convaincra aisément de ce que le

procédé de « glissement » est applicable à toute fonction continue, univoque, bornée, définie sur un intervalle quelconque fini ou infini, et qui ne traverse un intervalle quelconque qu'un nombre fini de fois.

J'appellerai dans la suite fonction  $F$ , une fonction jouissant de cette propriété.

THÉORÈME. — Soit

$$y^{(n)}(x) , \quad n = 1, 2, 3 \dots ,$$

une suite infinie de fonctions  $F$  bornées dans leur ensemble, et qui ne traversent un intervalle quelconque qu'un nombre de fois inférieur à une borne finie indépendante de  $n$ , on peut par « glissement » en déduire une infinité de fonctions

$$Y^{(n)}(t) \quad n = 1, 2, 3 \dots ,$$

définies dans l'intervalle fermé  $0 \leq t \leq 1$ , qui soient également continues et bornées.

Remarque. — On peut définir des glissements particuliers pour lesquels toutes les propriétés établies dans le présent travail subsistent, auxquels correspondent des changements de variable ; c'est-à-dire que si  $Y(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  est la transformée par glissement d'une fonction  $F$ ,  $y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , on peut trouver une fonction  $\psi(t)$  continue et jamais décroissante dans l'intervalle fermé  $0 \leq t \leq 1$ , telle que  $\psi(0) = a$ ,  $\psi(1) = b$  et que

$$Y(t) = y[\psi(t)] .$$

Lorsque l'intervalle  $(a, b)$  est infini, la fonction  $\psi(t)$  ne sera définie et continue que sur l'intervalle ouvert  $0 < t < 1$ .

THÉORÈME. — Etant donné une fonction  $F$ , on peut par « glissement » en déduire une fonction continue dans l'intervalle  $(0, 1)$ , constante dans tout l'intervalle sauf sur un ensemble de mesure nulle.

En effet ; les  $N_p$ ,  $N_{2p}$  ...  $N_{2^q p}$  ... ayant la même signification qu'au § 6, mais pour une seule fonction, je divise en  $2^q N_{2^q p}$  parties égales les intervalles que j'avais divisés en  $N_{2^q p}$  par-

ties égales. Je puis alors placer les points  $\Sigma$ , de manière que tout  $\Sigma_r^{2^{q+1}p}$  soit à une distance d'un  $\Sigma_r^{2^q p}$  moindre que

$$\lambda_q = \frac{N_{2^q p}}{2^{1+\dots+(q+1)} N_p \dots N_{2^{q+1}p}} = \frac{1}{2^{1+\dots+(q+1)} N_p \dots N_{2^q p}}.$$

Un point  $\Sigma_r^{2^{q'} p}$  quelconque se trouve donc à une distance d'un  $\Sigma_r^{2^q p}$  nulle si  $q' \leq q$  et plus petite que

$$l_q = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{q+m}, \quad \text{si } q' > q.$$

On peut alors enfermer tous les  $\Sigma$  dans des intervalles dont la somme des longueurs est au plus égale à

$$y_q = 2l_q N_{2^q p}$$

et la courbe limite sera constante en dehors de ces intervalles. Mais ceci est vrai quel que soit  $q$ , et puisque  $y_q$ , on le voit aisément, tend vers 0 avec  $\frac{1}{q}$ , la fonction transformée est constante sauf sur un ensemble de mesure nulle.

L'existence d'une pareille fonction constante dans les intervalles contigus à un ensemble parfait discontinu est bien connue. J'ai montré ici comment elle pouvait se déduire du procédé de glissement.

N'ayant point fait de recherches bibliographiques sur le sujet de ce travail, je ne puis affirmer que les deux théorèmes et la remarque de la page 276 soient nouveaux.