

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	21 (1920-1921)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	QUELQUES REMARQUES SUR UN THÉORÈME RELATIF A LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE ET SUR LA SÉRIE DE KUMMER
<b>Autor:</b>	Cailler, C.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-515721">https://doi.org/10.5169/seals-515721</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

QUELQUES REMARQUES SUR UN THÉORÈME  
RELATIF A LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE  
ET SUR LA SÉRIE DE KUMMER

PAR

C. CAILLER (Genève).

I. — A la suite des recherches de M. J. Hadamard, je suis parvenu, il y a quelques années, à la relation suivante.

Soit

$$\Phi(x, y, z) = F(\alpha, \beta, \gamma, xz)F(\alpha', \beta', \gamma', y(1-z)) ;$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 z^{\gamma-1} (1-z)^{\gamma'-1} \Phi(x, y, z) dz \\ &= \frac{(\gamma-1)! (\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!} (1-y)^{\alpha-\beta'} F(\alpha, \beta, \gamma+\gamma', x+y-xy) . \quad (1) \end{aligned}$$

Le fait que le second membre est hypergéométrique relativement à la combinaison  $x+y-xy = 1 - (1-x)(1-y)$  est fort remarquable. Malheureusement le résultat ci-dessus n'est pas général. Outre les conditions de convergence de l'intégrale, lesquelles sont naturellement supposées, il faut pour la validité de (1) que les paramètres obéissent aux conditions

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' . \quad (2)$$

Mon attention ayant été récemment appelée de nouveau sur le théorème (1), j'ai essayé de le généraliser en supprimant les restrictions (2). Pour qu'une semblable généralisation offre quelque intérêt, il faut évidemment que le second membre reste une fonction simple de la quantité  $x+y-xy$ . Or j'ai eu beau modifier la forme de la fonction  $\Phi$ , et changer

les limites de l'intégration, toutes mes tentatives ont invariablement échoué; il semble que les conditions (2) soient nécessaires et jusqu'ici l'équation (1) reste seule de son espèce.

En revanche, j'ai trouvé que l'intégrale du premier membre de (1) peut revêtir une autre forme, valable pour tous les  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  qui assurent la convergence; cette nouvelle forme est encore une intégrale définie, la suivante

$$C(1-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha'-\beta'} \int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{a+b-1} H(x, y, z) dz . \quad (3)$$

La signification des lettres est consignée dans le tableau

$$\begin{aligned} & H(x, y, z) \\ = & F(\alpha + \alpha - \beta, b, a + b, 1 - z) F(\alpha + \alpha, b + \beta, \gamma + \gamma', x(1 - y)z + y) \\ & a = \gamma + \gamma' - \alpha - \alpha' , \quad b = \gamma + \gamma' - \beta - \beta' , \\ C = & \frac{(\gamma - 1)! (\gamma' - 1)!}{(\gamma + \gamma' - 1)!} \frac{(a + \alpha - 1)! (b + \beta - 1)!}{(\alpha - 1)! (\beta - 1)! (a + b - 1)!} . \end{aligned}$$

Il est clair qu'on peut obtenir plusieurs égalités analogues, en alternant entre elles les lettres  $\alpha$  et  $\beta$ , ou  $\alpha'$  et  $\beta'$ , ou encore en permutant les deux séries  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $x$  et  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $y$ . En outre, les propriétés connues de la fonction  $F$  permettent d'écrire (3) sous plusieurs formes équivalentes; en faisant, par exemple

$$\begin{aligned} & L(x, y, z) \\ = & F(\alpha + \alpha - \beta, b, a + b, 1 - z) F(\alpha', \beta', \gamma + \gamma' xz(1 - y) + y) , \end{aligned}$$

on a, au lieu de (3), l'expression

$$C \int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{a+b-1} (1-xz)^{\alpha'+\beta'-\gamma-\gamma'} L(x, y, z) dz . \quad (4)$$

Le procédé, tout élémentaire, par lequel j'ai établi autrefois la relation (1) s'applique avec le même succès à la démonstration de l'égalité nouvelle

$$\int_0^1 z^{\gamma-1} (1-z)^{\gamma'-1} \Phi dz = C(1-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha'-\beta'} \int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{a+b-1} H dz . \quad (5)$$

Faisons d'abord  $x = 0$ , le premier membre se réduit à

$$\int_0^1 z^{\gamma'-1} (1-z)^{\gamma-1} F(\alpha', \beta', \gamma', yz) dz$$

ce qui vaut, comme on voit aisément,

$$\frac{(\gamma'-1)! (\gamma-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!} F(\alpha', \beta', \gamma+\gamma', y) .$$

Mais c'est aussi la valeur du second membre; car, dans la même hypothèse  $x = 0$ , la forme (4) nous le montre identique à l'expression

$$CF(\alpha', \beta', \gamma+\gamma', y) \int_0^1 z^{a+b-1} (1-z)^{\alpha-1} F(a+\alpha-\beta, b, a+b, z) dz . \quad (6)$$

Mais ici l'intégrale définie vaut

$$\frac{(a+b-1)! (\alpha-1)!}{(a+b+\alpha-1)!} F(a+\alpha-\beta, b, a+b+\alpha, 1) ,$$

ou

$$\frac{(a+b-1)! (\alpha-1)!}{(a+b+\alpha-1)!} \frac{(a+b+\alpha-1)! (\beta-1)!}{(\alpha+\alpha-1)! (b+\beta-1)!} .$$

On n'a qu'à transporter ce résultat dans (6) et à substituer la valeur de C pour faire apparaître l'identité.

La formule (5) à démontrer est donc exacte, si  $x$  est nulle, cela quelles que soient les valeurs  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$  et  $y$ .

Pour aller plus loin, désignons par  $D(\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; x, y)$  la différence existant entre les deux membres de (5). On reconnaît à l'instant l'exactitude de la relation

$$\frac{dD}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} D(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; \alpha', \beta', \gamma'; x, y) .$$

Par suite, si  $x = 0$ , non seulement la différence D s'annule mais aussi toutes les dérivées  $\frac{d^n D}{dx^n}$ . Et puisque D est analytique en  $x$ , on en conclut que D est identiquement nulle.

La relation (5) est donc exacte sous la réserve, qui va de

soi, que les intégrales des deux membres soient convergentes l'une et l'autre. Le théorème peut d'ailleurs être aisément modifié de manière à embrasser le cas de divergence; il suffit de remplacer le contour rectiligne d'intégration par un lacet double entourant les points critiques zéro et l'unité.

La proposition (1) apparaît alors comme un simple cas particulier de (5), celui où les deux paramètres  $\alpha$  et  $b$  sont nuls: c'est d'ailleurs le fait que la formule (1) se généralise dans l'équation (5) qui prête un certain intérêt à cette dernière malgré sa complexité.

**II.** — Pour donner un exemple concret d'application de la formule (5), prenons le cas  $b = 0$ , ou

$$\gamma + \gamma' = \beta + \beta' ;$$

une seule des conditions (2) est ici supposée.

Faisons en outre  $y = 1$ ; le premier membre de l'équation (5) est

$$\int_0^1 z^{\gamma-1} (1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \beta, \gamma, xz) F(\alpha', \beta', \gamma', 1-z) dz .$$

Pour qu'il soit convergent, il faut et il suffit que

$$\gamma > 0 \quad \gamma' > 0 \quad \gamma + \gamma' - \alpha' - \beta' > 0 .$$

Afin d'en obtenir la valeur, à la place du second membre de (5) qui se présente sous une forme illusoire, nous choisissons l'expression (4). Elle donne

$$CF(\alpha', \beta', \gamma + \gamma', 1) \int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{\alpha-1} (1-xz)^{\alpha'+\beta'-\gamma-\gamma'} dz ,$$

et enfin, après quelques réductions faciles,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 z^{\gamma-1} (1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \beta, \gamma, xz) F(\alpha', \beta', \gamma', 1-z) dz \\ &= \frac{(\gamma-1)! (\gamma'-1)! (\gamma + \gamma' - \alpha' - \beta' - 1)!}{(\gamma + \gamma' - \alpha' - 1)! (\gamma + \gamma' - \beta' - 1)!} F(\gamma + \gamma' - \alpha' - \beta', \alpha, \gamma + \gamma' - \alpha', x) . \end{aligned}$$

Cette équation suppose, répétons-le,  $\gamma + \gamma' = \beta + \beta'$ .

III. — La formule (1) présente de nombreux cas de dégénérescence dignes de remarque. Qu'il me soit permis de citer ici, en manière de conclusion, ceux qui concernent la série de Kummer

$$F(\alpha, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Cette série entière possède la propriété

$$e^x F(\alpha, \gamma; -x) = F(\gamma - \alpha, \gamma; x)$$

facile à démontrer; elle se relie d'autre part aux fonctions de Bessel par l'équation

$$\frac{J_{\frac{\alpha-1}{2}}(xi)}{(xi)^{\frac{\alpha-1}{2}}} = A F(\alpha, 2\alpha; -2x) e^x$$

où A désigne une constante convenablement choisie.

Ceci posé, nous avons le résultat suivant.

Soient

$$F(\alpha, \gamma; x) \quad \text{et} \quad F(\alpha', \gamma'; x)$$

deux fonctions de Kummer telles que

$$\alpha + \alpha' = \gamma + \gamma' ;$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 z^{\gamma-1} (1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \gamma; xz) F(\alpha', \gamma'; \gamma(1-z)) dz \\ &= \frac{(\gamma-1)! (\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!} e^x F(\alpha', \gamma+\gamma'; \gamma-x), \end{aligned}$$

c'est l'analogue de la formule (1).

A cette équation je joins encore la suivante, qui ne suppose plus réalisée la condition  $\alpha + \alpha' = \gamma + \gamma'$ ; c'est

$$\begin{aligned} & \int_0^1 z^{\gamma-1} (1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \gamma; xz) F(\alpha', \gamma'; x(1-z)) dz \\ &= \frac{(\gamma-1)! (\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!} F(\alpha + \alpha', \gamma + \gamma'; x). \end{aligned}$$


---