Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1918)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA RECTIFICATION APPROCHÉE D'UN ARC DE CERCLE

Autor: Pleskot, Ant.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18033

sociétaire changera annuellement de place avec tous les autres. Comment s'y prendra-t-il pour être seul à garder sa place ?

Pour n impair quelconque, les solutions sont fournies par l'exercice **14**, III; d'autre part, toute formule relative à $(2n-1)$ lettres $a, b, c, d \dots g$ en donne une pour une lettre de plus h, en remplaçant $(n-1)$ échanges n'ayant pas de lettres communes, comme $(a, b), (c, d), \dots$ par $(a, h)(a, b)(b, h), (c, h)(c, d)(d, h), \dots$ et ajoutant à la fin (g, h).

38. — Dans un groupe de n hommes, n femmes et n enfants, peut-on permuter chaque enfant avec chacune des $2n$ grandes personnes et une fois seulement, de manière à retrouver la disposition primitive ?

Soit $n = 3$; remarquons que $(\mathrm{A}, a, \alpha) = (\alpha, \mathrm{A})(\alpha, a)$, et posons

$$\mathrm{R} = (\mathrm{A}, a, \alpha)(\mathrm{B}, b, \beta)(\mathrm{C}, c, \gamma) , \qquad \mathrm{S} = (\mathrm{A}, c, \beta)(\mathrm{B}, a, \gamma)(\mathrm{C}, b, \alpha) ,$$
$$\mathrm{T} = (\mathrm{A}, b, \gamma)(\mathrm{B}, c, \alpha)(\mathrm{C}, a, \beta) ;$$

on aura :

$$\mathrm{RT} = \mathrm{S}^{-1} , \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{SRT} = \mathrm{RTS} = \mathrm{TSR} = 1 .$$

On s'inspirera de ce procédé pour les autres valeurs de n multiples de 3.

SUR LA RECTIFICATION APPROCHÉE D'UN ARC DE CERCLE

PAR

Ant. Pleskot (Pilsen).

Dans cette Note nous présentons une construction générale de la rectification approchée d'un arc de cercle; quelques constructions connues en forment un cas particulier.

Soit (fig. 1) un cercle K de centre O et de rayon r et AB l'axe correspondant à un angle au centre φ.

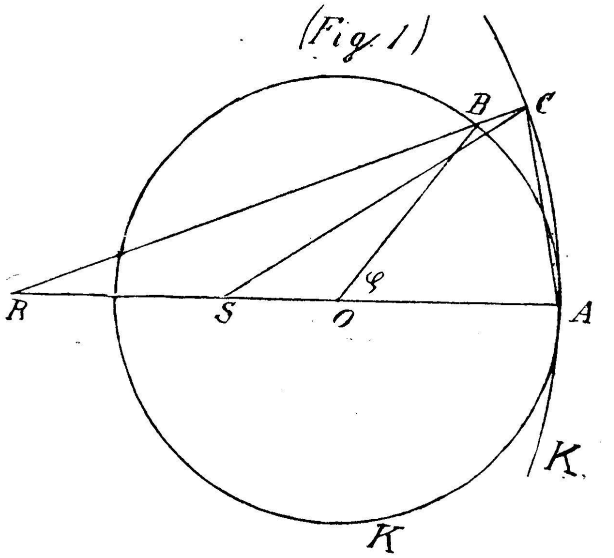
On décrit d'un point S pris sur la droite AO le cercle K_1, tangent au cercle K en A; soit a le rayon de ce cercle, c'est-à-dire

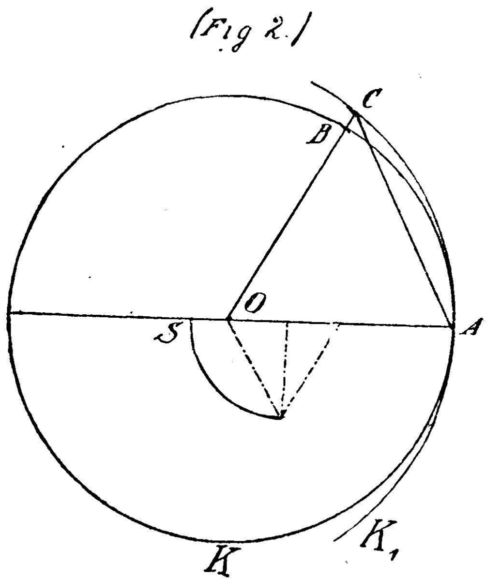
$$\mathrm{AS} = a = \frac{r}{k} , \qquad (k \text{ constante}).$$

Sur la droite AO nous prenons encore le point R, dont la distance au point O est donnée par l'expression

$$\mathrm{OR} = d = \frac{12ar - 3r^2 - 8a^2}{3r^2 - 4a^2} \cdot r = \frac{12k - 3k^2 - 8}{3k^2 - 4} r \,. \qquad (1)$$

La droite RB coupe le cercle K_1 en C. *La longueur* AC *est approximativement égale à l'arc* AB.





Par le calcul un peu long, mais simple, on trouve

$$\mathrm{AC} = r\varphi + r\varphi^5(\alpha_0 + \alpha_1\varphi + \ldots) \;;$$

l'erreur $\Delta = r\varphi - \mathrm{AC}$ est proportionnelle au rayon et approximativement à la 5^{me} puissance de l'angle φ.

Suivant le choix de k, nous obtenons différentes constructions. Elles seront simples pour $k < 1$.

Construction I. — Nous laissons le point R coïncider avec le centre O ; $d = 0$; la quantité k est donnée par l'équation (1) :

$$3k^2 - 12k + 8 = 0 \,,$$

d'où l'on tire

$$k = \frac{\mathrm{O} - 2\sqrt{3}}{3} \,, \qquad \text{et} \qquad a = \frac{r}{k} = \frac{r}{4}(3 + \sqrt{3}) \,.$$

La longueur a peut être facilement construite.

La rectification approchée est donc la suivante (fig. 2) : De S comme centre on décrit le cercle K_1 de rayon $\mathrm{AS} = \frac{r}{4}(3 + \sqrt{3})$. Le côté OB coupe le cercle K_1 en C et la longueur AC est approximativement égale à celle de l'arc AB. La longueur AC est donnée par les équations

$$AC = \frac{3+\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\omega}{2}\,, \qquad \omega = \varphi - \varepsilon\,, \qquad \sin\varepsilon = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}\sin\varphi\,.$$

De ces équations on peut calculer les erreurs d'approximation; celles-ci sont inférieures à celles que l'on obtient par la construction de Cusanus.

Construction II. — Le résultat est encore meilleur si l'on prend R au point diamétralement opposé à A, c'est-à-dire si $d = r$.

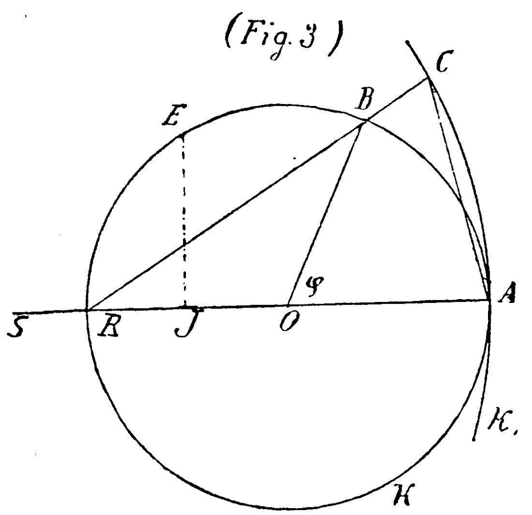
Pour la quantité k on a maintenant l'équation

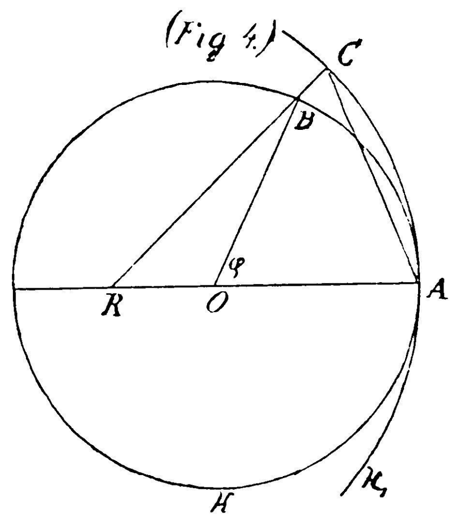
$$\frac{12k - 8 - 3k^2}{3k^2 - 4} = 1\,,$$

d'où l'on tire

$$k = \frac{3-\sqrt{3}}{3}\,, \qquad a = \frac{r}{k} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}r\,.$$

La construction est la suivante (fig. 3) :





Si $OJ = \frac{r}{2}$, la perpendiculaire menée du point J à la droite OA coupe le cercle donné en E. On fait $JS = JE$; puis le cercle K_1 décrit du centre S avec un rayon SA, coupe la droite RB au point C et la longueur AC est très approximativement égale à l'arc AB. On peut se servir de cette construction pour les angles de 0 à 90°.

La longueur AC est donnée par les équations :

$$AC = (3+\sqrt{3})\sin\frac{\omega}{2}\,, \qquad \omega = \frac{\varphi}{2} - \varepsilon\,, \qquad \sin\varepsilon = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}\sin\frac{\varphi}{2}\,.$$

De ces équations on peut évaluer les erreurs Δ d'approximation; on trouve, pour $\varphi = 60°$, $\Delta = 0{\cdot}0003r$, pour $\varphi = 90°$, $\Delta = 0{\cdot}00021r$.

Cette construction résulte de la première si l'on rectifie après la première construction l'arc d'angle $\frac{\varphi}{2}$ et de rayon $2r$.

Construction III. — On obtient une construction très simple si l'on fait coïncider le point R avec le point S, c'est-à-dire, si l'on pose

$$r + d = a \ , \qquad \text{d'où} \qquad 1 + \frac{d}{r} = \frac{1}{k} \ ;$$

l'équation (1) devient

$$1 + \frac{12k - 8 - 3k^2}{3k^2 - 4} = \frac{1}{k} \ , \qquad \text{ou} \qquad (3k - 2)^2 = 0 \ ,$$

d'où

$$k = \frac{2}{3} \ , \qquad \text{et} \qquad a = \frac{3}{2} r \ .$$

La construction est la suivante (fig. 4) : Prenons $OR = \frac{r}{2}$.

Du point R on décrit le cercle K_1 de rayon RA. La droite RB coupe ce cercle en C. La longueur AC est approximativement égale à l'arc AB, Elle est donnée par les équations

$$AC = 3r \sin \frac{\varphi}{2} \ , \qquad \sin \omega = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{5 + 4 \cos \varphi}} \ .$$

La valeur approchée est identique à celle qu'on obtient par la construction donnée par M. d'Ocagne.

Enfin nous posons $k = 0$; d'où $a = \infty$ et $d = 2r$; le cercle K_1 est remplacé par la tangente au cercle K et nous trouvons la construction de Cusanus.

Les constructions ci-dessus permettent aussi de résoudre le problème inverse : porter sur une circonférence, à partir d'un point donné, un arc de longueur donnée.