Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1918)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE SUR LES PERMUTATIONS

Autor: Aubry, A.

Kapitel: II — Exercices.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18032

NOTE SUR LES PERMUTATIONS[1]

PAR

A. Aubry (Dijon).

II. — Exercices.

1. — I. Les duades *ab*, *cd*, *ef* appartenant à une certaine permutation des sept premières lettres, la déterminent si on sait en outre que ces duades encadrent respectivement une, trois et cinq lettres. (Voir *E. M.*, 1917, p. 281.)

II. Les duades *ac*, *bd*, *ce*, *df* et *eg* déterminent une permutation des mêmes lettres, si on sait que la première, la troisième et la cinquième encadrent chacune une lettre.

III. Les duades *dg*, *ad*, *bf*, *ae*, *cg* déterminent une permutation des mêmes lettres si les deux premières encadrent chacune deux lettres et les deux dernières, chacune trois.

2. — Quatre hommes A, B, C, D et leurs femmes *a*, *b*, *c*, *d* sont sur une même ligne ; chaque mari est à gauche de sa femme et de plus il y a une personne entre A et *a*, deux entre B et *b*, trois entre C et *c* et quatre entre D et *d*. Comment ces huit personnes sont-elles disposées ?

La combinaison de $C_{***}c$ et de $D_{****}d$ ne peut donner que l'une des formules

$$C_*D_*c_{**}d\ ,\qquad CD_{**}c_*d\ ,\qquad D_*C_{**}dc\ ,\qquad D_{**}C_*d_*c_*\ ;$$

combinant avec $B_{**}b$, elles en donnent six, dont deux seulement permettent l'introduction de A_*a : on a ainsi les deux solutions BCD*b*A*cad* et DAC*a*B*dcb*.

Pour cinq ménages, on n'a aucune solution.

3. — I. Déterminer les permutations des dix premières lettres telles que les duades *ab*, *ef*, *bc*, *fg*, *cd* encadrent un même nombre de lettres, ainsi que *af*, *ei*, *fj*, *id*.

[1] Voir *L'Enseign. Mathém.*, Tome XIX, p. 280-294, 1917.

Des deux formules $a_x b_z e_x f$ et $a_y f$ on tire $2x + z + 2 = y$, et des deux suivantes $a_x b_z e_y i_y d$ et $a_x b_x c_x d$, $x + z + 2y + 3 = 3x + 2$; d'où, en éliminaut z, $y = x + \frac{x+1}{3}$.

La valeur $x = 0$ donne $y = 0$, solution illusoire.

Pour $x = 2$, on a $y = 3$; et pour $x = 5$, $y = 7$, résultat inacceptable.

La solution unique $x = 2$, $y = 3$ conduit à la permutation *aehbficgjd*.

II. Même question pour les douze premières lettres, les deux groupes de duades étant

$$cj,\ ge,\ kb,\ al,\ if,\ hd \quad \text{et} \quad ke,\ ib,\ gj,\ ad,\ hf.$$

Soit $g_t e$, $h_t d$, $k_u e$, $a_u d$; une même permutation ne peut donner les chaînes *kge* et *had*, car il s'ensuivrait d'une part $t < u$ et d'autre part $t > u$. On a donc, ou bien

$$kge,\ ikb,\ gcj,\ ahd,\ hif, \quad \text{d'où} \quad a_v h_v i_v k_v g_v c_x j,$$

ou

$$gke,\ kib,\ cgj,\ had,\ ihf, \quad \text{d'où} \quad c_y g_y k_y i_y h_y a_z d.$$

v et y ne peuvent être que 0 ou 1, sans quoi la permutation aurait plus de douze lettres. De là, après treize essais, les trois solutions,

$$ahikgcldfbej, \quad alhdifkbgecj, \quad cgkihajebfdl.$$

4. — De combien de manières peut-on disposer sur une ligne n animaux, dont un chien a et un chat b, de manière que le chat ne soit pas à côté du chien ? Associant les deux éléments *ab* et *ba* aux $n - 2$ autres lettres, on aura les $2(n-2)!\,(n-1)$ permutations où a et b sont voisins. De la, la réponse.

5. — Permutations telles qu'aucune lettre ne soit à côté de sa voisine naturelle.

C'est impossible pour trois lettres. Pour quatre, on a *cadb* et *bdac*. Pour cinq, on ajoutera e, à toutes les places possibles et on effectuera les permutations tournantes. D'où vingt-deux permutations. On continuera de même.

Ainsi on ne saurait placer sur une ligne deux choux, deux chèvres et deux loups, de manière qu'un loup (une chèvre) ne soit pas à côté d'une chèvre (d'un chou). Mais on peut placer deux choux, deux chèvres, deux loups et deux chasseurs, de façon qu'aucun chasseur (aucun loup, aucune chèvre) ne soit à côté d'un loup (d'une chèvre, d'un chou). On peut ajouter deux gendarmes, qu'on s'interdira de placer auprès des chasseurs, etc.

6. — I. Combien peut-on construire de tétraèdres avec six droites égales ou avec six triangles équilatéraux égaux ? (Ferriot.)

II. Combien de cubes avec douze droites égales ou six carrés égaux ? (Mac-Mahon.)

III. Mêmes questions avec des droites ou des carrés de deux couleurs, deux droites ou deux carrés de même couleur ne pouvant se toucher.

IV. De combien de manières peut-on exprimer le cube ABCD*dcba*?

V. Combien de trajets ininterrompus peut-on réaliser avec les douze arêtes et les quatre grandes diagonales d'un cube ? Ou bien avec les arêtes et quatre des petites diagonales ?

7. — Les permutations de n lettres fournissent ensemble $\frac{1}{2}C_{n,2}\,n!$ inversions. (Stern.)

8. — I. Une permutation de n lettres et ses tournantes d'ordre impair sont de mêmes ou de différentes classes selon que n est impair ou pair. Elle est toujours de même classe que ses tournantes d'ordre pair. Par exemple *bcdea* provient de *abcde* par le renversement des quatre duades *ab*, *ac*, *ad*, *ae* : elle est donc de la même classe que *abcde*.

II. Les permutations de n lettres $ab \ldots cd$ et $dc \ldots ba$ sont de la même classe si n est de l'une des formes 4, $4+1$, et de classes différentes dans les autres cas, car les nombres d'inversions diffèrent de

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} .$$

III. Il en est de même pour les permutations de $2n$ lettres

$$ab \ldots d\mathrm{AB} \ldots \mathrm{D} \qquad \text{et} \qquad a\mathrm{A}b\mathrm{B} \ldots d\mathrm{D} .$$

IV. Les permutations de $2n$ lettres $ab \ldots d\mathrm{AB} \ldots \mathrm{D}$ et $\mathrm{AB} \ldots \mathrm{D}ab \ldots d$ sont ou ne sont pas de la même classe suivant que n est pair ou impair, car les n^2 duades $a\mathrm{A}$, $a\mathrm{B}$, ... $b\mathrm{A}$, ... changent de sens.

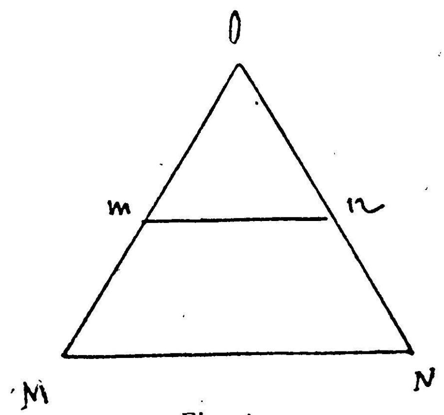

Fig. 1.

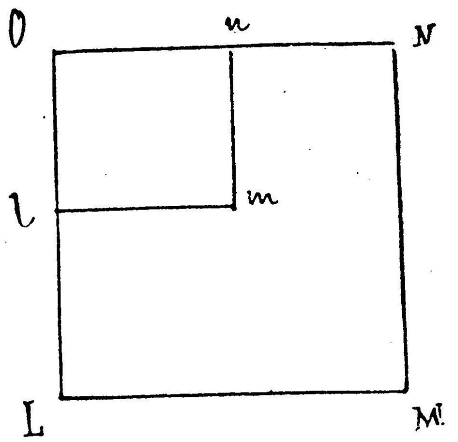

Fig. 2.

9. — Les habitants des maisons m, n (fig. 1) veulent changer de logement avec ceux des maisons M, N, en se servant de la maison actuellement vacante O et d'après cette règle que chaque fois qu'une maison sera vide, elle sera réoccupée par l'un de ses voisins, jusqu'à exécution complète du programme.

1° Désignant par a, b, B, A, les habitants actuels des maisons m, n, N, M, le changement demandé s'opérera comme l'indique la formule

$$ba\text{AB}ab\text{AB}ab\text{BA}\ , \qquad (\alpha)$$

laquelle veut dire que b commencera en allant en O, puis a en allant en n, puis A en m, etc.

L'étude de ces mouvements se fait facilement à l'aide de jetons ou de simples morceaux de carton portant les indications a, b, B, A.

2° On peut considérer la maison vide comme un jeton O, qu'on échange successivement avec ses voisins. Dans ce cas, la formule (α) indique que l'opération

$$(\text{O}, b)(\text{O}, a)(\text{O}, \text{A})(\text{O}, \text{B})(\text{O}, a)(\text{O}, b)(\text{O}, \text{A})(\text{O}, \text{B})(\text{O}, a)(\text{O}, b)(\text{O}, \text{B})(\text{O}, \text{A})$$

appliquée à la permutation OabBA, la transforme en OABba.

3° Toute autre disposition est possible, soit en faisant mouvoir les jetons sur le petit triangle puis sur le grand, soit inversement en opérant sur le grand et ensuite sur le petit. Les plus compliquées de ces opérations demandent 19 mouvements; la plus courte, 3 seulement.

4° Opérons de même avec les carrés Om, OM (fig. 2). On a à considérer la permulation abcCBA de six jetons placés aux points l, m, n, N, M, L. Tout mouvement se ramène à une combinaison de trajets sur les périmètres des deux carrés; celui des jetons du petit carré change abcCBA en cabCBA, et sur le grand carré en cbCBAa. Dans les deux cas, la parité du nombre des inversions ne change pas; donc si deux permutations sont de deux classes différentes, il est impossible de passer de l'une à l'autre : telles sont abcCBA et ABCcba.

Ainsi on ne peut échanger à la fois les jetons de mêmes lettres[1]; de même pour deux hexagones ayant un angle commun, pour deux octogones, etc.; tandis qu'on le peut pour les pentagones, ce qui demande 48 mouvements; pour les heptagones, ce qui en demande 96; etc.[2]

10. — Appelons *nœud* du n^e ordre une courbe unicursale à n points doubles, fermée ou non et figurant un fil passant, tantôt sur lui-même, tantôt au-dessous. Parcourant le fil dans un sens

---

[1] Mais on peut changer A avec B, c'est-à-dire transformer abcCBA en bacCAB; il faut 28 mouvements.

[2] Voir Ed. Lucas et Rouse-Ball, op. cit., plusieurs jeux basés sur des règles analogues.

déterminé, on notera chaque croisement, en le désignant par une lettre accentuée ou non, selon qu'en ce point le fil passe dessus ou dessous. Le nœud se notera par une permutation de n lettres accentuées et des mêmes lettres non accentuées : ainsi, pour trois croisements, on écrira par exemple $ab'c'a'bc$. Un cas très remarquable est celui où le fil passe alternativement sur et sous lui-même[1] : dans ce cas, le nœud est *indénouable*.

Le premier problème de cette théorie est de définir, si c'est possible, un nœud d'après une permutation donnée. Avec un ou deux croisements, on a les boucles dénouables aa', $ab'ba'$, $aa'bb'$; — avec trois croisements, le nœud simple *abcabc*, qui a pour *pseudo-axe* la *médiane* de *ac* (c'est-à-dire qu'il peut être dessiné symétriquement par rapport à la perpendiculaire au milieu de la distance *ac*) ; — avec quatre, 1° la permutation *abcdbadc* donne le nœud double ayant le milieu de *bd* comme pseudo-centre, 2° deux de ses tournantes donnent deux autres nœuds ayant *ab* pour pseudo-axe ; — avec cinq, on a : 1° la permutation *abcdeabcde*, qui a pour pseudo-axes, *ae* et sa médiane, 2° la permutation *abcdeadcbe* et deux de ses tournantes ayant pour pseudo-axes, *bcd*, *dbc*, *eca* ou *ace* (cinq formes différentes) ; — avec six, 1° la permutation *abcdefdabcfe* (trois formes ayant *bd* pour pseudo-axes) et ses tournantes, 2° deux autres permutations données à l'exercice suivant. — On ne tient pas compte des courbes présentant des boucles, ce qui a lieu quand deux mêmes lettres se suivent immédiatement dans la permutation.

Voici quelques autres nœuds d'ordres plus élevés, obtenus graphiquement :

abcdefgcbadgfe (axe, méd. de *ade*) , *abcdeabfdghefcgh* (axe, *ce*) ,

abcdefbgdhfagche (axe. *ef*) , *abcdefgabgbijhfcdeij* (axe, *df*) .

11. — I. Peut-on concevoir un canal passant alternativement sur et sous lui-même à l'aide de ponts de mêmes hauteurs, c'est-à-dire tels qu'il y ait même différence de niveau entre l'eau supérieure et l'eau inférieure ? Soient les lettres a, b, c ... l, en nombre impair ; on a la solution unique *abc* ... *labc* ... *l*. il n'y a pas de solution pour un nombre pair de lettres.

II. Peut-on imaginer un chemin de fer qui se croise six fois lui-même, successivement par-dessus, par-dessous et à niveau ? On a le tracé *abcdefbafedc* (qui peut prendre quatre formes différentes, avec comme axes, *ab*, *dcfe*, *cfed* ou *cdef*) et ses tournantes.

---

[1] La possibilité d'une telle alternance est démontrée *S. Œ.* (suppl. de juin 1913) et étendue aux courbes multicursales.

Les conditions que doit présenter une permutation pour qu'elle figure un nœud, pour que celui-ci soit susceptible de symétrie, qu'il soit entièrement dénouable (tel que $ab'c'a'bc$), etc., posent des questions d'analysis situs sur lesquelles on pourra revenir.

III. Tracer une route se croisant six fois elle-même en deux hameaux, deux villages et deux villes, de manière à rencontrer deux fois de suite un hameau, un village et une ville. On a le tracé *abcabdefdefc* (qui peut prendre six formes, susceptibles de symétrie par rapport à *ae* ou la médiane de *ae*) et ses tournantes[1].

12. — Numérotons, sur un *quadrillage* indéfini, les horizontales 1, 2, 3, ... et les verticales 1′, 2′, 3′, ... Considérons la formule symétrique

$$62'34'51'73'65'56'37'15'43'26' ,$$

qu'on interprétera ainsi : suivre l'horizontale 6 jusqu'à la verticale 2′, qu'on descendra jusqu'à l'horizontale 3, laquelle on suivra jusqu'à 4′, et ainsi de suite. On arrivera à un *angle d'encadrement*, qu'on peut représenter simplement par la formule

$$6234517365 .$$

En voici d'autres plus ou moins heureux :

$$365124 , \quad 6531724 , \quad 624367154 , \quad 54824371632 , \quad 63825487143$$
$$537245876132 , \quad 437258761321678 .$$

On peut ainsi figurer de nombreux motifs de grecques et autres ornements d'architecture, fermés ou non, unicursaux ou non.

13. — I. Généraliser le problème du n° **6**, et résoudre le problème inverse.

II. Quatre hommes, A, B, C, D, leurs femmes *a*, *b*, *c*, *d*, et leurs enfants α, β, γ, δ sont placés dans cet ordre sur une ligne. Comment arriver, par un minimum d'échanges, à ce que chaque enfant soit entre ses deux parents ?

14. — I. L'opération (a, b) change la duade *ab* en *ba*. Elle ne change rien aux duades *ac* et *bc*, mais change le sens des duades *ac* et *cb*.

II. L'opération $(a, c)(b, d)$ ne change rien aux duades *ab*, *cd* ou *ad*, *cb* et change le sens des duades *ab*, *dc* ou *ad*, *bc*.

III. L'opération $(a, b)(a, c)(b, c)$ effectuée dans l'ordre indiqué, laisse *b* inchangé ; de même $(a, b)(a, c)(a, d)(a, e)(b, c)(b, d)(b, e)(c, d)(c, e)(d, e)$ laisse *c* inchangé ; etc. (Voir exercice **37.**)

IV. Quel que soit l'ordre dans lequel on applique à une permutation les deux opérations $(a, b)(c, d)$ et $(a, c)(b, d)$, le résultat est le même que si on lui appliquait $(a, d)(b, c)$.

15. — I. Une certaine permutation des six premières lettres pré-

---

[1] Autre question du même genre. Selon que le nombre des faces d'un prisme est pair ou impair, on peut ou on ne peut marquer les arêtes, des lettres *a*, *b*, *c*, de manière que deux arêtes de même lettre ne se touchent pas et qu'on puisse tracer sur la surface une ligne unicursale rencontrant les arêtes dans l'ordre *a*, *b*, *c*, *a*, *b*, *c* ...

sente les duades be, ef et, après avoir effectué l'échange (b, f), les duades bd, fc. Quelle est-elle ?

On a, dans la transformée, les duades fe, eb, bd, fc, d'où, sauf a, les quatre formes

$$fcebd\ , \quad fecbd\ , \quad febcd\ , \quad febdc\ ,$$

et mettant a à toutes les places, 24 formules possibles.

II. Une permutation contient les duades ab, ae, cd, cf; on y fait les échanges $(a, d)(b, c)(e, f)$, après quoi on a la nouvelle duade ef. Quelle est cette permutation ?

La transformée est définie par les duades ae, ba, dc, df, ef, ce qui ramène au problème du n° **1**, 7°. (*E. M.*, 1917, p. 281.)

16. — I. Une permutation de quatre lettres peut subir, de 96 manières différentes, les six échanges de toutes ses lettres, sans que finalement elle se trouve modifiée. Ainsi on a :

$$(\mathrm{A}, b)(\mathrm{B}, a)(\mathrm{A}, \mathrm{B})(a, b)(b, \mathrm{B})(a, \mathrm{A}) = 1\ .$$

Cette solution peut se figurer par un quadrille dont chaque personnage change de place avec tous les autres et seulement une fois, en ramenant la situation primitive :

Aa	bB	aA	Aa
bB	Aa	Bb	bB

II. Soient n entiers 1, 2, ... n, disposés en cercle, et k premier avec n.

1° Echangeons 1 et $k + 1$, puis 1 et $2k + 1$, puis 1 et $3k + 1$, et ainsi de suite. Après n opérations, on retrouvera la disposition primitive, sauf que chaque lettre aura tourné de k rangs.

2° On trouve le même résultat en échangeant les nombres 1 et $k + 1$, puis celui-ci et $2k + 1$, ensuite ce dernier et $3k + 1$, et ainsi de suite.

3° Si on échange les nombres occupant actuellement les points 1 et $k + 1$, puis ceux des points 2 et $k + 2$, puis ceux des points 3 et $k + 3$, et ainsi de suite, on obtiendra encore le même résultat, mais après $k(n - k)$ opérations.

17. — I. Un ouvrage en n volumes est rangé dans un certain ordre. Le ranger dans l'ordre naturel, avec le moins de déplacements possible.

II. Le même ouvrage est rangé de droite à gauche. Le ranger de gauche à droite, en déplaçant deux volumes à la fois.

18. — On a une pile de cahiers numérotés de 1 à n et dont le n° a renvoie au n° b, celui-ci au n° c, celui-ci au n° d, etc., les lettres a, b, c, d, ... désignant les nombres 1, 2, 3, ... n, dans un certain ordre. On tire, pour le consulter, le cahier n° h qu'on replace sur la pile, puis celui auquel il se réfère et qu'on replace de même sur la pile, et ainsi de suite. Finalement les cahiers sont placés, en partant du bas, et quel que soit leur ordre primitif, dans l'ordre indiqué par la tournante de abc ... commençant par h.

19. — Un quartier de la ville que j'habite possède deux pharmaciens, un autre trois, un autre quatre, un autre cinq et enfin un dernier six. Ils s'entendent entre eux pour fermer certaines pharmacies le dimanche, de manière qu'il en reste toujours au moins une d'ouverte dans chaque quartier et que chacun d'eux ait eu, après un certain temps, le même nombre de repos hebdomadaires. Comment se fera le roulement ?

Il faudra 120 dimanches et on aura :

1er quartier	60	fois	1, 2 ;
2e	»	20	»	12, 23, 31, 1, 2, 3 ;
3e	»	15	»	123, 234, 341, 412, 1, 2, 3, 4 ;
4e	»	12	»	1234, 2345, . . 5123, 1, 2, 3, 4, 5 ;[1]
5e	»	10	»	12345, 23456, ... 61234, 1, 2, 3, 4, 5, 6 .

20. — A l'aide de déplacements de ses termes par-dessus deux autres, on peut toujours ou on ne peut jamais ramener une permutation donnée à la permutation naturelle, selon qu'elle est de la première ou de la seconde classe. Ed. Lucas a énoncé ce théorème sans démonstration.

1° Si les trois termes successifs f, g, h sont changés en h, f, g, la duade fg ne change pas, mais les deux autres fh et gh deviennent hf et hg. Ainsi si h est le plus petit des trois, il y a deux inversions de moins.

Si les quatre termes f, g, h, i sont changés en i, g, f, h, les deux duades fh, gh ne sont pas changées, mais les autres fg, fi, gi, hi deviennent gf, if, ig, ih ; de sorte que si i est le plus petit terme, il y a quatre ou deux inversions de moins, selon que $f \gtrless g$.

2° Si 1 est à un rang impair, par déplacements successifs, on l'amènera à sa place ; s'il est à un rang pair, on l'amènera à la deuxième place et on déplacera de deux rangs à droite le nombre qui occupe la première place.

Si 2 est à un rang pair, on l'amènera à sa place ; s'il est à un rang impair, on l'amènera à la troisième place et on déplacera de deux rangs à droite le nombre qui occupe la deuxième place.

Et ainsi de suite.

3° Le nombre des inversions diminuant, sans changer de parité, si primitivement il était pair, il finira par s'annuler, c'est-à-dire

[1] On a aussi pour ce quartier, la solution

123, 234, ... 512, 12, 23, 34, 45, 51 .

qu'on aura la permutation naturelle; s'il était d'abord impair, il arrivera à la valeur 1 et on aura la permutation $123 \dots (n-2) n (n-1)$, qui est irréductible à $123 \dots n$.

Par exemple, on peut assurer que 7365124 ne peut, par le moyen indiqué, se transformer en 1234567.

21. — Deux permutations réciproques (n° **5**, VII) sont de même classe (Netto). Conséquence de ce que l'introduction du nombre $n+1$ entre le k^e et le $(k+1)^e$ termes d'une permutation des n premiers entiers la change ou ne la change pas de classe selon que $(n-k)$ est pair ou impair.

22. — I. Dans une permutation de $2n-1$ lettres, on intercale les $n-2$ premières entre les $(n-1)$ dernières. Les transformées successives commencent par la n^e lettre, la $(n^2)^e$, la $(n^3)^e$, ...; le nombre k des transformées est ainsi donné par la relation $n^k \equiv 1 \pmod{2n-1}$.

Les cycles de la substitution conduisant d'une transformée à l'autre sont de la forme $(a, an, an^2, an^3, \dots)$.

II. Le f^e terme d'une permutation étant h, on remplace le chiffre h par le chiffre f. La 1re transformée commence par le 2e chiffre, la 2e par le 4e, la 3e par le 8e, ... de sorte que le nombre k des transformées est donné par la relation $2^k \equiv 1$.

Les cycles de la substitution sont de la forme $(a, b, c, d, \dots)$, b désignant la a^e lettre, c la b^e, d la c^e, ...

III. Les cycles de la substitution permettant de passer d'une permutation à sa réciproque, sont de la forme $(a, b, c, d, \dots)$, a désignant la h^e lettre et h la b^e, b la k^e et k la c^e, ...

Les permutations qui sont leurs propres réciproques, — c'est-à-dire celles qui restent inchangées par la transformation d'Euler, — se trouvent en appliquant à la permutation naturelle des échanges différents et contenant toutes les lettres : telle est la permutation 47618325, obtenue en appliquant à 12345678 la substitution $(1, 4)(2, 7)(3, 6)(5, 8)$.

23. — I. Considérons la permutation P formée par les restes de la division des $p-1$ premiers multiples de a par le nombre premier p; a est résidu ou non résidu de p selon que P est de première ou de seconde classe (Zolotaref). Conséquence de l'exercice **8** I et de ce qui suit.

Soit g une racine primitive de p et posons $g^h \equiv a$, $g^k \equiv n$: substituer la permutation $Q' = g^h, g^{h+1}, g^{h+2}, \dots$ à $P' = 1, g, g^2, \dots$ revient à substituer $P = a, 2a, 3a, \dots$ à $Q = 1, 2, 3, \dots$, car, dans les deux cas, on remplace, par exemple, n par an; or Q′ est la h^e tournante de P′ et d'autre part, si $h = 2j$, on a $(g^j)^2 \equiv a$.

II. On remarquera que les cycles de la substitution $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ sont de la forme $(k, ka, ka^2, \dots)$; si a est une racine primitive, la substitution est $(1, a, a^2, \dots a^{p-1})$.

III. Soient Q la permutation 1, 2, 3, ... $p-1$ et P celle des valeurs (mod p) des puissances de la racine primitive g; si $g^k \equiv h$, on a : $\left(\frac{P}{Q}\right)^k = (1, h, h^2, ...)$. Le cycle du deuxième membre contient $(p-1)$ termes, si h est elle-même une racine primitive.

De même, a désignant une racine non primitive fournissant une période de f termes, si on considère la substitution $S = (1, a, a^2, ... a^f)$ et qu'on pose $a^l \equiv b$, la substitution $S^l = (1, b, b, ... b^f)$ aura également f termes.

Ainsi soient $p = 11$, $g = 2$, $k = 6$; il viendra P = 1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6; et pour $k = 4$, P = 1, 4, 5, 9, 3, 1, 4, 5, 9, 3.

Soit $a = 3$, la période de S est 1, 3, 9, 5, 4 et on a, pour celles de S^2, S^3, S^4,

1, 9, 4, 3, 5, 1, 5, 3, 4, 9, 1, 4, 5, 9, 3.

24. — On place douze jetons numérotés de 1 à 12 sur les numéros du tableau ci-contre. On relève ces jetons *colonne par colonne*,

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

dans l'ordre 1, 4, 7, 10, 2, 5, ... et on recommence de même, en plaçant les jetons *par rangées* et les relevant par colonnes. Après cinq opérations de ce genre, on retrouve la disposition primitive. Voici du reste les transformations :

1	4	7	1	10	8	1	6	11	1	5	9	1	2	3
10	2	5	6	4	2	5	10	4	2	6	10	4	5	6
8	11	3	11	9	7	9	3	8	3	7	11	7	8	9
6	9	12	5	3	12	2	7	12	4	8	12	10	11	12

Les jetons extrêmes ne changent pas de place; les autres se déplacent suivant l'un des cycles (2, 5, 6, 10, 4) ou (3, 9, 11, 8, 7) : le jeton 3 par exemple, couvre successivement les n^os^ 3, 9, 11, 8, 7, 3, ... du tableau; inversement, le n° 3 du tableau est successivement recouvert par les jetons 3, 7, 8, 11, 9, 3, ...

Agissant de même sur le tableau disposé comme ci-contre, on trouvera également une période de cinq permutations dont les

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

cycles sont inverses des précédents.

Ces résultats se vérifient ainsi en général : soit $ab - 1 = p$ et t le *gaussien* de a, c'est-à-dire la plus petite valeur de x qui donne $a^x \equiv 1$; t est aussi le gaussien de b, puisque $ab \equiv 1$. Après k opérations, le jeton placé d'abord sur le n° n du tableau, recouvrira le n° déterminé par la formule $1 + (n - 1)a^k$; si $k = t$, ce n° est égal à n : donc la période des transformées en contient t.

Réciproquement, le jeton N recouvrant après k opérations le n° n, sera déterminé par la formule

$$n \equiv 1 + (\mathrm{N} - 1)a^k , \quad \text{d'où} \quad \mathrm{N}a^k \equiv (n - 1) + a^k ,$$

et, en multipliant par a^{t-k} et se rappelant que $a^t \equiv 1$,

$$n \equiv 1 + (\mathrm{N} - 1)a^{t-k} .$$

Substituer le deuxième tableau revient donc à échanger a et b ; les deux formules deviennent ainsi :

$$1 + (n - 1)b^k \equiv 1 + (n - 1)a^{t-k} , \qquad n = 1 + (\mathrm{N} - 1)a^k .$$

Pour $a = 4$, $b = 3$, $p = 11$, les numéros recouverts par les jetons placés d'abord sur 5, par exemple, seront les valeurs de $1 + 4 \cdot 4^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, c'est-à-dire 5, 6, 10, 4, 2, 5.

De même, pour les tableaux

3×2	4×2	5×2	6×2	4×3	5×3	6×3	5×4	6×4	6×5

il faudra

4	3	6	10	5	6	16	9	11	14

opérations.

Le cas de $a = b = 4$ rappelle un tour de cartes connu.

25. — Aux exemples de Cauchy donnés au n° **9**, ajouter les puissances des substitutions circulaires des 7, 8, 9 et 10 premières lettres.

26. — I. On a, en partant de la permutation quelconque *abcde* et lui appliquant successivement les trois substitutions indiquées au premier membre :

$$(a, b, c).(a, c, b, d).(a, c)(b, d) = \binom{abcde}{bcade}\binom{bcade}{dbcae}\binom{dbcae}{bdace}$$

$$= \binom{abcde}{bdace} = (a, b, d, c) .$$

De là, un autre moyen de trouver le produit de plusieurs substitutions.

II. On a les relations suivantes, de Cauchy :

$$(a, b)(b, c)(c, d) \ldots (k, l) = (l, k \ldots c, b, a)$$

$$(a, b)(a, c)(a, d) \ldots (a, l) = (a, b, c \ldots l),$$

permettant de transformer un cycle de n lettres en substitutions de $n-1$ échanges, et qui appliquées à la permutation ... $abc \ldots kl \ldots$ ont pour effet de déplacer (nº **7**) l immédiatement avant a, ou a immédiatement après l.

III. L'inverse du produit RTU ... V est $V^{-1} \ldots U^{-1}T^{-1}R^{-1}$ (Cauchy).

27. — I. Effectuer les produits $(a, b, c) . (a, c, b)$, etc. ; $(a, b) . (a, b, c) . (a, b, c, d)$, etc. ; $(a, b, c) . (b, c, d)$, etc.

II. Faire le produit de (a, b, c, d, e) par chacun des cycles

$$(b, c, d), \quad (b, c, d, e, f), \quad (b, d), \quad (a, c, e), \quad (a, c, e, b, d),$$

et de (a, b, c, d, e, f) par chacun de ceux-ci

$$(b, c, d, e, f, g), \quad (a, c, e), \quad (b, d, f), \quad (a, c, e, b, d, f).$$

Donner les formules générales.

28. — 1º Il y a toujours une substitution X qui, multipliée par la substitution donnée R, en reproduit une autre, donnée également, S. Ce *quotient* est $X = SR^{-1}$.

2º On peut aussi trouver aisément la ou les substitutions qui, appliquées à S, produisent une substitution semblable donnée T, ainsi que la ou les *racines* $n^{\text{èmes}}$ d'une substitution donnée. Par exemple, les 4! substitutions qui, appliquées à $(a, b)(c, d, e)(f, g, h, i)$, donnent $(a, b, c, d)(e, f, g)(h, i)$; ainsi que les $(n-1)!\,k^{n-1}$ racines $n^{\text{èmes}}$ de la substitution formée de n cycles de k lettres chacun.

De là, la solution de nombreuses *équations*, telles que

$$XRX = S\ ; \qquad RXS = SXR\ ; \qquad RSX = XRS\ ;$$

$$RX = SY,\ RS = YX\ ; \quad RX = SY,\ RY = XS\ ; \quad RX = SY,\ XR = YS\ ;$$

2º Au reste, certaines équations n'ont que des solutions *imaginaires*. Par exemple, pour $R = (a, b, c, d)$, ni $X^2 = R$, ni par suite (pour $X = RY$), $YRY = 1$, n'ont aucune solution ; tandis que $XRX = R$ en a une et $RXR = X$, quatre. — Plus généralement, soient $S^a = 1$, $T^b = 1$; si X est une racine de $SXT = X$, ou de $SX = XT$, il y en a au moins ab, lesquelles sont de la forme $S^f X T^g$.

29. — I. Si l'application de R à T donne le même résultat que celle de S à T, le produit SR^{-1} est échangeable avec T.

II. Si R appliquée à S donne T, R^{-1} appliquée à T donne S.

III. Si R appliquée à S et T donne S′ et T′, appliquée à (ST), elle donne (S′T′).

30. — Soient deux substitutions circulaires R, S, d'un même nombre de lettres. Pour k quelconque, le k^e terme de R étant f, le k^e terme de S étant g, et celui qui suit g dans R, le même que celui qui suit f dans S; l'application de R à S donne le même résultat que celle de S à R. Exemple : $R = (a, b, c, d, e, f)$, $S = (c, f, e, b, a, d)$.

Si la lettre suivant g dans R est la même que celle précédant f dans S, on a : RSR = SRS. Donner des exemples.

31. — Le produit des substitutions (a, b) et S a un cycle de plus ou de moins que S selon que a et b appartiennent ou non à des cycles différents de S. Ainsi les produits de $(a, b, c)(d, e, f, g)$ par (a, d) et par (e, f) sont respectivement (a, b, c, d, e, f, g) et $(a, b, c)(d, f, g)(e)$.

Il suit de là que deux permutations sont ou ne sont pas de la même classe selon que la substitution qui les lie contient un nombre pair ou un nombre impair de cycles ayant un nombre pair de lettres. Cela tient à ce que les substitutions

$$(a, b, \ldots c, d, e, \ldots h) \quad \text{et} \quad (a, b, \ldots c)(d, e, \ldots h)$$

appliquées à la permutation $ab \ldots cde \ldots h$, en fournissent deux autres qui n'en diffèrent que par l'échange de a et de d. C'est aussi une conséquence de **26**, II.

Ce théorème, dû à Cauchy, permet de déterminer la classe d'une permutation, bien plus aisément que par le dénombrement des inversions.

32. — Vérifier analytiquement l'assertion de l'exercice **9**, 2°. Le produit des échanges indiqués est en effet égal à $(b, B)(a, A)$.

De même, la formule analogue à (α) et fournissant l'échange de A et de B est

$$a\mathrm{AB}ba\mathrm{AB}ba\mathrm{B}ba\mathrm{BA}ba\mathrm{BA}b \ ;$$

il s'ensuit que la substitution $(\mathrm{O}, a)(\mathrm{O}, \mathrm{A})(\mathrm{O}, \mathrm{B}) \ldots (\mathrm{O}, b)$ appliquée à la permutation $(\mathrm{O}ab\mathrm{BA})$, la transforme en $\mathrm{O}ab\mathrm{AB}$, et en effet le produit de ces 19 échanges est (A, B).

La disposition primitive $\mathrm{O}ab\mathrm{BA}a$ devient $\mathrm{O}b\mathrm{BA}a$ en exécutant les opérations représentées par la formule $b\mathrm{BA}ab$; la substitution

$$(\mathrm{O}, b)(\mathrm{O}, \mathrm{B})(\mathrm{O}, \mathrm{A})(\mathrm{O}, a)(\mathrm{O}, b) = (b, \mathrm{B}, \mathrm{A}, a)$$

change donc la permutation $\mathrm{O}ab\mathrm{BA}$ en $\mathrm{O}b\mathrm{BA}a$. On voit comment on pourrait résoudre graphiquement certaines questions de substitution.

33. — Un objet susceptible d'une définition précise $F(a, b, c, \ldots l)$ subit une opération qui change sa définition en $\varphi(b, l, c, \ldots a)$.

Pour que les lettres de la nouvelle définition soient dans l'ordre naturel, on modifiera celles de la première suivant la substitution $\begin{pmatrix} abc \dots l \\ blc \dots a \end{pmatrix}$.

Appliquer cette remarque au problème suivant. Un carré est divisé en 4^n carrés égaux par des parallèles aux côtés; inscrire dans chacun de ces carrés un numéro tel que, repliant le grand carré n fois dans un sens et n fois dans l'autre, on obtienne une brochure qui, coupée, présente ses 4^n pages exactement numérotées.

34. — Un cube étant désigné par la formule ABCD$dabc$, où ABCD est la face supérieure, et DCcd la face antérieure; si on lui fait faire une rotation de 90° autour de l'une des arêtes bc, ba, ad, dc, il faudra faire subir à cette formule l'une des substitutions

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{A}, a, b, \mathrm{B})(\mathrm{C}, \mathrm{D}, d, c), & (\mathrm{A}, \mathrm{D}, d, a)(\mathrm{B}, \mathrm{C}, c, b), \\ (\mathrm{A}, \mathrm{B}, b, a)(\mathrm{C}, c, d, \mathrm{D}), & (\mathrm{A}, a, d, \mathrm{D})(\mathrm{B}, b, c, \mathrm{C}). \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

Si on fait tourner le cube de 90°, de 180° ou de 270° autour de Aa, les substitutions seront

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})(a, b, c, d), & (\mathrm{A}, \mathrm{C})(a, c)(\mathrm{B}, \mathrm{D})(b, d), \\ & (\mathrm{A}, \mathrm{D}, \mathrm{C}, \mathrm{B})(a, d, c, b). \end{array}\right\} \quad (\beta)$$

La première substitution (α) répétée donne

$$(\mathrm{A}, a, b, \mathrm{B})^2(\mathrm{C}, \mathrm{D}, d, c)^2 = (\mathrm{A}, b)(\mathrm{B}, a)(\mathrm{C}, d)(\mathrm{D}, c),$$

ce qui représente par conséquent la position du cube ayant tourné de 180° autour de bc, c'est-à-dire le cube $badc$CBAD; répétée encore deux fois, elle devient $= 1$, ce qui est évident, puisque le cube a tourné de 360° autour de bc.

Le produit des deux premières substitutions (α) est $(a, \mathrm{B}, \mathrm{D})(b, \mathrm{C}, d)$ et représente la substitution qui aurait pour effet de faire tourner le cube, d'abord de 90° autour de bc, puis de 90° autour de Aa.

On peut ainsi définir sans figures divers mouvements de la droite et du cube, ainsi que du tétraèdre.

35. — 1° Soient les n égalités $\mathrm{RT} = \mathrm{R'T'} = \dots = \mathrm{R'''T'''} = \mathrm{S}$, R et T étant échangeables, ainsi que R′ et T′, ...; on a :

$$\mathrm{RR'} \dots \mathrm{R'''ST'''} \dots \mathrm{T'T} = \mathrm{S}^{n+1}. \quad (\alpha)$$

2° Soient les deux substitutions échangeables

$$\mathrm{R} = (\mathrm{A}, \mathrm{D})(\mathrm{B}, \mathrm{C})(a, b)(c, d), \qquad \mathrm{T} = (\mathrm{A}, \mathrm{B})(\mathrm{C}, \mathrm{D})(a, d)(b, c);$$

posons

$$\mathrm{RT} = (\mathrm{A}, \mathrm{C})(\mathrm{B}, \mathrm{D})(a, c)(b, d) = \mathrm{S};$$

une relation entre différentes substitutions étant indépendante des lettres qui la composent, cette relation a encore lieu si celles-ci subissent une substitution quelconque. Par suite, appliquons (A, b, C, d) à R, T et S ; il vient $R'T' = S$, en écrivant

$$R' = (A, c)(B, d)(C, a)(D, b), \qquad T' = (A, a)(B, b)(C, c)(D, d).$$

De même, si on applique à R' et T' la substitution $(A, B)(C, D)$, il viendra $R''T'' = S$, en écrivant

$$R'' = (A, d)(B, c)(C, b)(D, a), \qquad T'' = (A, b)(B, a)(C, d)(D, c).$$

On a ainsi d'après 1° :

$$RR'R''ST''T'T = S^4 = 1; \qquad (\beta)$$

donc *on peut, de plusieurs manières, transformer une permutation de huit lettres, par échanges successifs, de manière que chacune d'elles change de place une seule fois avec toutes les autres et que finalement on retrouve la disposition primitive.* Comme à l'exercice **16**, I, on figurera cette solution par un quadrille comme ci-

$$\begin{array}{cc} A & B \\ a & b \\ d & c \\ D & C \end{array}$$

contre : les sept groupes de mouvements simultanés (β) sont symétriques.

3° Le théorème a lieu pour $4n$ lettres *abcdefgh* ... On pose, par exemple :

$$\begin{array}{ll} R = (a, c)(b, d)(e, g)(f, h) \ldots & T = (a, d)(b, c)(e, h)(f, g) \ldots \\ R' = (a, e)(b, f)(g, c)(h, d) \ldots & T' = (a, f)(b, e)(g, d)(h, c) \ldots \\ R'' = (a, g)(b, h)(e, c)(f, d) \ldots & T'' = (a, h)(b, g)(e, d)(f, c) \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

$$S = (a, b)(c, d)(e, f)(g, h) \ldots$$

d'où [1]

$$RR' \ldots S \ldots T'T = 1.$$

4° Ce théorème a encore lieu pour une $(4n+1)^e$ lettre j, ce qu'on voit en remplaçant n des échanges n'ayant pas de lettres communes, (a, b), (c, d), ... par $(a, j)(a, b)(b, j)$, $(c, j)(c, d)(d, j)$, ...

[1] $RT = S$, $R'T' = S$, ... puisque par exemple $(a, c)(b, d) . (a, d)(b, c) = (a, b)(c, d)$.

En remplaçant de même (a, b), ... par les substitutions équivalentes

$$(a, j)(a, k)(a, l)(a, m)(a, b)(b, m)(b, l)(b, k)(b, j), \ldots$$

et ajoutant la substitution $(j, k)(l, m)(j, l)(k, m)(j, m)(k, l)$, on passera d'une formule de $4n$ lettres à une de $(4n+4)$ lettres, ce qui donne une nouvelle démonstration du théorème 3°.

5° Mais il n'a pas lieu pour $(4n+2)$ ou $(4n+3)$ lettres, car alors la permutation aurait à subir un nombre impair d'échanges, ce qui ne peut donner qu'une permutation de classe différente.

6° On remarquera que (β) peut se remplacer par la relation

$$\mathrm{S(RT)(R'T')(R''T'')} = \mathrm{S}^4 = 1,$$

et que toute substitution-unité formée d'échanges seulement, peut être écrite en commençant par l'un quelconque des échanges. De là, de nouvelles solutions du problème de 2°, qu'on multipliera encore en remarquant que si l'une d'elles est désignée par $\varphi(\mathrm{A, B}, \ldots)$, $\varphi(\mathrm{A}, b \ldots)$, par exemple, en est une également.

36. — I. Soient deux groupes, d'un même nombre de lettres, A, B, C, ... a, b, c, ... et soit efg ... une des tournantes de celui-ci. Posons

$$\mathrm{R} = (\mathrm{A}, a)(\mathrm{B}, b) \ldots, \qquad \mathrm{R}' = (\mathrm{A}, b)(\mathrm{B}, c) \ldots, \ldots$$

$$\mathrm{T} = (\mathrm{A}, e)(\mathrm{B}, f) \ldots, \qquad \mathrm{T}' = (\mathrm{A}, f)(\mathrm{B}, g) \ldots, \ldots$$

La substitution $\mathrm{V} = (a, b, c, \ldots)$, qui, appliquée à R et T les change en R' et T', change aussi (RT) en (R'T'); en outre, à cause de la symétrie de la construction de (RT), toutes les lettres s'y trouvent et les rangs des lettres, dans chacun des cycles de ce produit, sont en progression arithmétique de même raison, ce qui fait qu'ils ont même nombre de lettres : donc l'application de V à (RT) ne fait qu'y changer les cycles les uns dans les autres. Ainsi on a : $\mathrm{RT} = \mathrm{R'T'} = \ldots$

II. Soit un groupe de n hommes et n femmes; faire changer de place chaque homme avec chaque femme, une seule fois, de façon que la disposition primitive se retrouve. — Il y a n^2 échanges, donc n ne peut être impair. Soit $n = 2\nu$: avec les notations de I, si e désigne la ν^e femme, on aura

$$\mathrm{RR'R''} \ldots \mathrm{T''T'T} = \mathrm{R}^\nu \mathrm{T}^\nu$$

ce qui donne une solution, si ν est pair.

III. De là, aisément, une troisième démonstration du théorème de l'exercice **35**, 3°.

37. — Le président d'une société, voulant assurer son maintien à la présidence, fait édicter un règlement d'après lequel chaque sociétaire changera annuellement de place avec tous les autres. Comment s'y prendra-t-il pour être seul à garder sa place ?

Pour n impair quelconque, les solutions sont fournies par l'exercice **14**, III ; d'autre part, toute formule relative à $(2n-1)$ lettres $a, b, c, d \ldots g$ en donne une pour une lettre de plus h, en remplaçant $(n-1)$ échanges n'ayant pas de lettres communes, comme $(a, b), (c, d), \ldots$ par $(a, h)(a, b)(b, h), (c, h)(c, d)(d, h), \ldots$ et ajoutant à la fin (g, h).

38. — Dans un groupe de n hommes, n femmes et n enfants, peut-on permuter chaque enfant avec chacune des $2n$ grandes personnes et une fois seulement, de manière à retrouver la disposition primitive ?

Soit $n = 3$; remarquons que $(\mathrm{A}, a, \alpha) = (\alpha, \mathrm{A})(\alpha, a)$, et posons

$$\mathrm{R} = (\mathrm{A}, a, \alpha)(\mathrm{B}, b, \beta)(\mathrm{C}, c, \gamma) , \qquad \mathrm{S} = (\mathrm{A}, c, \beta)(\mathrm{B}, a, \gamma)(\mathrm{C}, b, \alpha) ,$$
$$\mathrm{T} = (\mathrm{A}, b, \gamma)(\mathrm{B}, c, \alpha)(\mathrm{C}, a, \beta) ;$$

on aura :

$$\mathrm{RT} = \mathrm{S}^{-1} , \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{SRT} = \mathrm{RTS} = \mathrm{TSR} = 1 .$$

On s'inspirera de ce procédé pour les autres valeurs de n multiples de 3.

SUR LA RECTIFICATION APPROCHÉE D'UN ARC DE CERCLE

PAR

Ant. Pleskot (Pilsen).

Dans cette Note nous présentons une construction générale de la rectification approchée d'un arc de cercle ; quelques constructions connues en forment un cas particulier.

Soit (fig. 1) un cercle K de centre O et de rayon r et AB l'axe correspondant à un angle au centre φ.

On décrit d'un point S pris sur la droite AO le cercle K_1, tangent au cercle K en A ; soit a le rayon de ce cercle, c'est-à-dire

$$\mathrm{AS} = a = \frac{r}{k} , \qquad (k \text{ constante}).$$