

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	20 (1918)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	EXTRACTION DE LA RACINE $n$ ième D'UN NOMBRE RÉEL PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES
<b>Autor:</b>	Béritch, Mladen T.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-18031">https://doi.org/10.5169/seals-18031</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

EXTRACTION DE LA RACINE  $n^{\text{ème}}$   
D'UN NOMBRE RÉEL  
PAR APPROXIMATIONS SUCCÉSIVES

PAR

Mladen T. BÉRITCH (Belgrade, Serbie).

---

Pour extraire la  $n^{\text{ème}}$  racine d'un nombre réel, il y a différents procédés par approximations successives. Pour obtenir les valeurs approchées par défaut et par excès, on emploie ou deux fonctions ou une fonction dans laquelle on fait deux substitutions. Dans les deux cas, on est obligé d'exécuter deux opérations.

J'indique dans la présente Note un procédé qui fournit à la fois, par le même calcul, les deux valeurs approchées (l'une par défaut, l'autre par excès). De plus il fournit le moyen de savoir d'avance le nombre de chiffres communs à la racine cherchée et à deux valeurs approchées.

Ce procédé pourra être généralisé et appliqué au calcul des racines réelles d'une équation, ou des solutions d'un système des équations algébriques ou transcendantes, ce qui fera l'objet de Notes ultérieures.

1. — Désignons par  $\alpha$  la valeur arithmétique de la racine  $\sqrt[n]{A}$  et considérons la fonction

$$\varphi(t) = f \left[ 1 - \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{A}{t^n} \right) - \frac{n-1}{2n^2} \left( 1 - \frac{A}{t^n} \right)^2 \right].$$

La fonction  $\varphi(t)$  est toujours croissante lorsque  $t$  varie de 0 à  $+\infty$  ( $\varphi'$  étant le carré). Pour  $t = 0$  on a  $\varphi(0) = -\infty$ ; quand  $t$  croît de  $t = 0$  jusqu'à la valeur  $f = \alpha = \sqrt[n]{\frac{A}{2}}$ , la fonction  $\varphi(t)$  croît en restant plus petite que  $t$ ; pour  $t = \alpha$  on a  $\varphi(\alpha) = \alpha$ ; quand  $t$  croît de  $\alpha$  jusqu'à  $\alpha$ , la fonction  $\varphi(t)$  croît en restant plus grande que  $t$ ; pour  $t = \alpha$  on a  $\varphi(\alpha) = \alpha$ ; quand  $t$  croît de  $\alpha$  jusqu'à  $+\infty$ , la fonction  $\varphi(t)$  croît en restant plus petite que  $t$ ; pour

$t = +\infty$  on a  $\varphi(\infty) = \infty$ . Dans l'intervalle  $(\alpha, a)$  cette fonction satisfait à l'inégalité

$$t \leq \varphi(t) \leq a \quad (\text{les égalités ayant lieu pour } t = \alpha \text{ et } t = a), \quad (1)$$

et dans l'intervalle  $(a, +\infty)$  la même fonction satisfait à l'inégalité

$$t \geq \varphi(t) \geq a \quad (\text{les égalités ayant lieu pour } t = a). \quad (2)$$

Donc dans l'intervalle  $(\alpha + \varepsilon, +\infty)$  l'égalité  $t = \varphi(t)$  n'existe que pour  $t = a$ .

Donnons à  $t$  une valeur positive  $t = g$ , plus petite que  $a$  et plus grande que  $\alpha$ ; cette valeur  $t$  satisfait à l'inégalité

$$\frac{A}{2} < g^n < A, \quad (3)$$

en vertu de (1) ou encore

$$g < \varphi(g) < a \quad (1')$$

de sorte que,  $g$  étant une valeur approchée par défaut de  $\sqrt[n]{A}$ ,  $\varphi(g)$  en sera aussi une valeur approchée par défaut, mais plus rapprochée de la valeur exacte  $a$  que  $g$ . En posant  $\varphi(g) = g_1$ ,  $\varphi(g_1) = g_2, \dots$ , la suite :  $g, g_1, g_2, \dots$  fournira donc des valeurs de plus en plus approchées par défaut de  $\sqrt[n]{A}$  et convergeant uniformément vers cette limite.

De même donnant à  $t$  une valeur positive  $t = h$ , plus grande que  $a$  (qui satisfait à l'inégalité  $h^n > A$ ), en vertu de (2) on aura

$$a < \varphi(h) < h, \quad (2')$$

de sorte que,  $h$  étant une valeur approchée par excès de  $\sqrt[n]{A}$ ,  $\varphi(h)$  en sera aussi une valeur approchée par excès, mais plus rapprochée de la valeur exacte  $a$  que  $h$ . En posant  $\varphi(h) = h_1$ ,  $\varphi(h_1) = h_2, \dots$ , la suite  $h, h_1, h_2, \dots$  fournira donc des valeurs de plus en plus approchées par excès de  $\sqrt[n]{A}$  et convergeant uniformément vers cette limite.

On a ainsi deux suites de valeurs, obtenues à l'aide d'une valeur arbitraire  $t = g$  (qui satisfait à l'inégalité (3)) et d'une valeur  $t = h$  ( $h^n > A$ ); elles se rapprochent de plus en plus de la valeur exacte  $a$  de la racine et finissent par en différer aussi peu qu'on voudra.

2. — Si l'on remplace  $g_i$  (resp.  $h_i$ ) par une valeur approchée  $g'_i$  (resp.  $h'_i$ ) plus grande que  $g_i$  (resp. plus petite que  $h_i$ ) et plus com-

mode pour le calcul à effectuer, deux cas pourront se présenter :

$$\varphi(g'_i) > g'_i \quad (\text{resp. } \varphi(h'_i) < h'_i) \quad (a)$$

les deux valeurs approchées  $g_i$  et  $g'_i$  (resp.  $h_i$  et  $h'_i$ ) sont toutes les deux par défaut (resp. par excès),

$$\varphi(g'_i) < g_i \quad (\text{resp. } \varphi(h'_i) > h'_i) \quad (b)$$

la valeur  $g'_i$  (resp.  $h'_i$ ) n'est plus la valeur approchée par défaut (resp. par excès) mais la valeur approchée par excès (resp. par défaut) puisqu'elle satisfait à l'inégalité (2) (resp. (1)) et non à l'inégalité (2)). Donc il faudra écrire  $g'_i = h$  (resp.  $h'_i = g$ ).

Dans la pratique on pourra procéder de la manière suivante :

Donnons à  $t$  une valeur arbitraire  $h$  plus grande que  $\sqrt[n]{A}$  (c'est-à-dire telle que  $h^n > A$ ) ; on calcule  $\varphi(h)$ , on pose  $\varphi(h) = h_1$ , on choisit un nombre  $h'_i$  plus petit que  $h_1$  et plus commode pour le calcul de  $\varphi(h)$  ; on trouve  $\varphi(h'_i)$  plus grand ou plus petit que  $h'_i$ . Dans le deuxième cas  $h'_i$  est la valeur approchée par excès, dans le premier cas,  $h'_i$  est la valeur approchée par défaut, donc  $h'_i$  est une valeur désignée par  $g$ .

Si l'on a  $\varphi(h'_i) < h'_i$  on pose  $\varphi(h'_i) = h_2$  et on continue de la même manière.

Si l'on a  $\varphi(h'_i) > h'_i$  on posera  $h'_i = g$ ,  $\varphi(g) = g_1$ , on choisit une valeur  $g'_i$  plus grande que  $g_1$  et plus commode pour le calcul ; on calcule  $\varphi(g'_i)$  qui peut être plus grand ou plus petit que  $g'_i$ , qui est d'après cela une valeur approchée par défaut ou par excès.

On continue en choisissant toujours : une valeur plus grande, si la valeur trouvée était la valeur approchée par défaut ; ou une valeur plus petite, si la valeur trouvée était la valeur approchée par excès. De cette manière on se rapprochera de la racine  $a$  des deux côtés, la valeur exacte de la racine restant toujours comprise entre la plus grande des valeurs de  $g_i$  et la plus petite des valeurs de  $h_i$ . En poussant suffisamment les calculs, on resserre cet intervalle autant qu'on veut.

3. — En supprimant le troisième terme du crochet, la fonction  $\varphi(t)$  devient la fonction

$$\psi(t) = t \left[ 1 - \frac{1}{n} \left( 4 - \frac{A}{t^n} \right) \right].$$

Cette fonction  $\psi(t)$  est infinie pour  $t = 0$  ; quand  $t$  croît de  $t = 0$  jusqu'à  $t = a$ ,  $\psi(t)$  décroît ; pour  $t = a$ , on a  $\psi(a) = a$  ; quand  $t$

croît de  $t = a$  jusqu'à  $+\infty$ ,  $\psi(t)$  croît; pour  $t = +\infty$  ou  $\psi(\infty) = +\infty$ . La fonction  $\psi(t)$  satisfait à l'inégalité

$$\psi(t) \geq t \quad (\text{si } t > 0)$$

l'égalité n'ayant lieu que pour  $t = a$ .

Si  $t = g$ , c'est-à-dire si  $t$  est une valeur approchée par défaut de  $a$ ,  $\varphi(g)$  l'est aussi, tandis que  $\psi(g)$  est une valeur approchée par excès. On aura l'inégalité

$$g < \varphi(g) < a < \psi(g),$$

donc la racine cherchée  $a$  sera comprise entre deux valeurs  $\varphi(g)$  et  $\psi(g)$ .

En connaissant le premier chiffre décimal (ou les deux chiffres) différent de zéro, de l'expression  $1 - \frac{A}{t^n}$ , on connaîtra approximativement la valeur du terme supprimé

$$\frac{n-1}{2n^2} \left(1 - \frac{A}{t^n}\right)^2. \quad (4)$$

Le nombre des zéros qui suivent la partie entière de la valeur numérique de ce terme est le nombre de chiffres communs à deux valeurs approchées, appartenant en même temps à la valeur exacte de la racine cherchée.

En effet les deux fonctions qui donnent les deux valeurs approchées l'une par défaut (la fonction  $\varphi$ ) et l'autre par excès (la fonction  $\psi$ ) ne diffèrent que par le produit de (4) et de  $t$ ; les deux crochets ne diffèrent que par le terme (4). Donc les deux crochets auront les mêmes chiffres quand le terme (4) contient des zéros qui suivent la partie entière de la valeur numérique de ce terme.

La valeur exacte  $a$  aura des chiffres qui sont communs aux deux fonctions  $f$  et  $\varphi$ ; donc on connaîtra le nombre de chiffres exacts qu'on peut obtenir de l'opération envisagée.

Les valeurs approchées peuvent être calculées avec autant de chiffres qu'on veut, mais il suffit de calculer un ou deux chiffres qui suivent les chiffres communs.

*Premier exemple.* Calculer  $\sqrt{1000}$ ; on a ici  $n = 2$ ,  $A = 1000$ .

Posons  $t = 32 = h$  ( $32^2 > 1000$ ), on trouve  $\varphi(h) = 31,625 = h_1$ ; choisissons un nombre plus petit que  $h_1$ , plus commode pour le calcul  $h'_1 = 31,62 = g$  ( $31,62^2 < 1000$ ). Le terme (4) est ici  $\frac{1}{8} 0,00017^2 = 0,000000004$ , la valeur exacte  $a$  aura huit chiffres communs aux deux valeurs approchées, on calculera ces valeurs

approchées avec neuf ou dix chiffres, on aura

$$\varphi(g) = 31,62277657 = g_1, \quad \varphi(g) = 31,62277670.$$

Choisissons un nombre plus grand que  $g_1 = \varphi(g)$  et plus petit que  $\psi(g)$  avec lequel il est plus commode à calculer  $\varphi$ , c'est  $g'_1 = 31,6227766$  ( $g'_1 < 1000$ ); le terme (4) a ici la valeur à peu près  $\frac{1}{20}21$ , la valeur exacte  $a$  aura 20 ou 21 chiffres exacts, communs aux deux valeurs approchées  $\varphi$  et  $\psi$ , que nous calculerons avec 21 ou 22 chiffres; on trouve ainsi (en calculant 22 chiffres)

$$\varphi(g'_1) = 31,622\ 776\ 601\ 683\ 793\ 3\ 1998$$

$$\psi(g'_1) = 31,622\ 776\ 601\ 683\ 793\ 3\ 2001$$

(on n'a ici que 18 chiffres de la valeur exacte, les deux valeurs diffèrent en quatre chiffres, mais la vraie différence n'est que 0,0003 du dernier chiffre commun).

*Deuxième exemple.* Calculer  $\sqrt[5]{1000}$ ; on a ici  $n=5$ ,  $A=1000$ . Posons  $t=4=h$  ( $4^5 > 1000$ ); le terme (4) est 0,00004 et il faut calculer avec cinq ou six décimales; on trouve  $\varphi(t)=3,98108=h_1$ . Choisissons maintenant  $h'_1$  plus petit et plus commode pour le calcul, par exemple  $h'_1=3,98$ . Posons  $t=h'_1=3,98=g$ , ( $g^5 < 1000$ ) la valeur du terme (4) étant 0,000 000 15, calculons avec huit chiffres, nous trouvons

$$\varphi(t) = 3,9810717 = g_1, \quad \psi(t) = 3,9810723.$$

Nous avons trouvé six chiffres de la valeur exacte  $a=3,98107\dots$  (On pourrait prendre aussi  $g'_1=3,981072$ , etc.)