

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONTRIBUTION A LA CONSTRUCTION DES ÉLÉMENTS DOUBLES
D'UNE INVOLUTION HYPERBOLIQUE
Autor: Redl, Fr.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18030>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CONTRIBUTION A LA CONSTRUCTION DES ÉLÉMENTS DOUBLES D'UNE INVOLUTION HYPERBOLIQUE

PAR

Fr. REDL (Zell s/Ybbs).

Une involution, de sommet S , est déterminée par les paires de rayons ST, ST' et SA, SA' de la fig. 1; un rayon en est représenté par $\Sigma\Sigma'$, de trait plus marqué. D'après une propriété connue, les six sommets d'un quadrilatère complet (dans la figure: $TT'AA'\Sigma\Sigma'$) peuvent être placés sur trois paires de droites correspondantes d'une involution. Dans notre cas, deux sommets viennent sur le rayon double $\Sigma\Sigma'$.

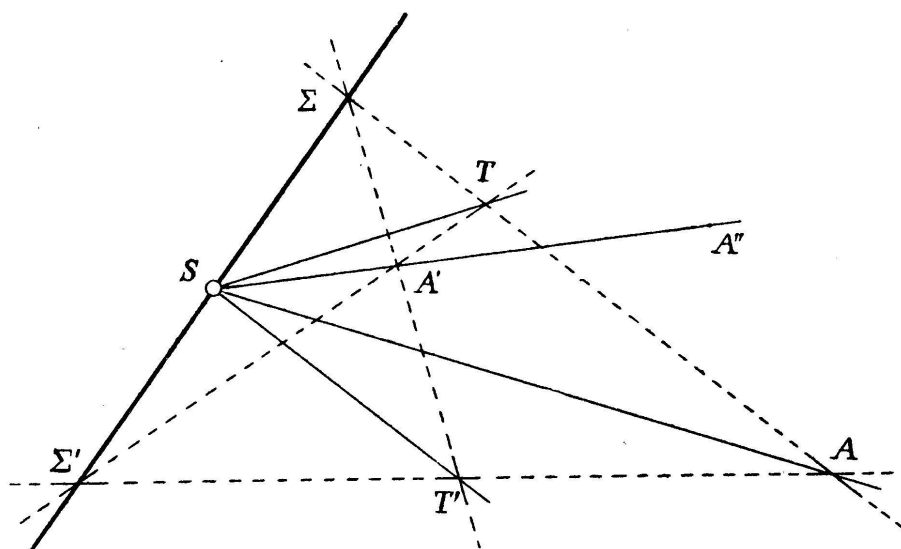


Fig. 1.

La conique qui touche ST en $T = (1.2)$; ST' en $T' = (4.5)$ et qui passe par $A = 3$ contient aussi $A' = 6$, car $\Sigma\Sigma'$ est la droite de Pascal de l'hexagone numéroté. Maintenons T, T' et A fixes, tandis que nous faisons tourner la droite de Pascal autour de S ; le point d'intersection de $\Sigma T'$ et $\Sigma' T$ décrit la conique en question, et vient par conséquent aussi en A'' ,

seconde intersection de SA' . La droite de Pascal représente alors le second rayon double de l'involution.

Réciproquement si, au lieu d'un rayon double, on donnait la conique qui touche une paire de l'involution en T et T' , et coupe l'autre en A' et A'' (respectivement A et A_1), on trouverait les rayons doubles en construisant les points $\Sigma(\Sigma')$ et $\Sigma_1 = AT \times A''T'$ ($\Sigma_1' = AT' \times A''T$), le point A_1 convenant au même degré que A . La fig. 2 indique la construction. La droite TA est coupée par $T'A'$ et $T'A''$ en Σ , resp. Σ_1 ; $S\Sigma$ et $S\Sigma_1$ sont les rayons cherchés. Comme les points T et T' sont arbitraires, on peut admettre que la conique est un cercle.

On obtient facilement une autre construction des rayons doubles (fig. 2) avec l'aide des points R et R_1 sur la polaire TT' du point S . R et R_1 sont choisis conjugués suivant le

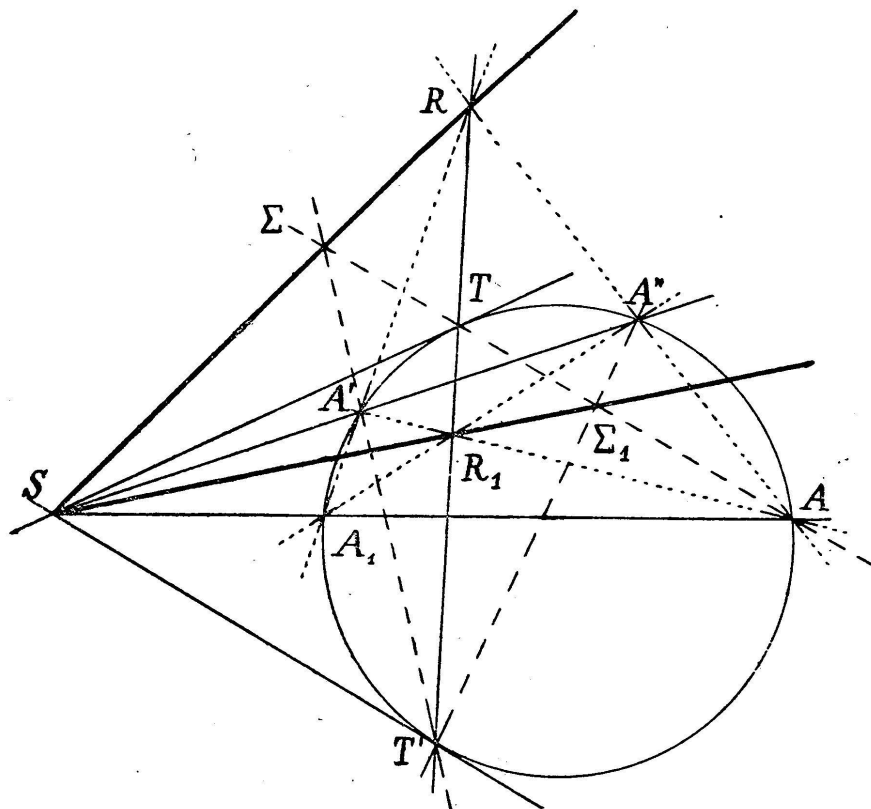


Fig. 2.

cercle, et divisent harmoniquement le segment TT' ; d'autre part comme points diagonaux du quadrilatère complet $AA_1A'A''$, ils sont aussi divisés harmoniquement par les côtés opposés SA et SA' , etc. Nous avons ainsi une construction des éléments doubles pour le cas où l'une des paires embrasse l'autre : par la paire extérieure (TT') on décrit un

cercle arbitraire, et l'on détermine le pôle (S), par rapport à ce cercle, du support de l'involution. On joint ce dernier aux points intérieurs par des droites dont les intersections avec le cercle ($A'A''$ et AA_1) sont à joindre entre elles, ce qui conduit aux points doubles R, R_1 .

On obtiendrait finalement une troisième construction des rayons doubles en se servant (dans la fig. 2) du théorème suivant lequel deux points diagonaux du quadrilatère complet $AA_1A'A''$ doivent toujours se trouver sur une diagonale du quadrilatère des tangentes aux points précités.

En généralisant par projection la dépendance entre les rayons doubles indiquée dans la fig. 2, on peut, selon les circonstances, l'utiliser pour construire un rayon double, lorsque l'autre est donné. Dans ce but on se sert habituellement des propriétés harmoniques du quadrilatère complet, comme d'ailleurs on s'en rend compte dans la fig. 2, en relation avec les points R et R_1 . Mais comme on peut aussi arriver au point R en partant de Σ_1 , ceci nous conduit, en combinaison avec la méthode que nous venons de rappeler, au procédé suivant. Si l'on mène par un point arbitraire du rayon double intérieur (extérieur) deux droites dont chacune coupe les quatre rayons de l'involution; si ensuite on considère comme correspondants les points d'intersection de la première droite auxiliaire, et ceux de la seconde, par les rayons conjugués de l'involution, les droites de jonction des quatre paires de points correspondants passent par un même point du rayon double extérieur (intérieur).

Inversement, si nous partons de $R(R_1)$ pour gagner $\Sigma_1(\Sigma)$, nous trouvons encore une seconde solution de notre problème: Si l'on mène, par un point arbitraire du rayon double intérieur (extérieur) deux droites, dont chacune coupe une paire *différente* de rayons de l'involution, les droites de jonction des quatre points d'intersections, convenablement appariées, se coupent sur le rayon double extérieur (intérieur).

Pour compléter la fig. 2, nous ajoutons la remarque suivante: Si la tangente $A'(A'')$ coupe la droite AA_1 en $P(P')$, et la tangente $A(A_1)$ la droite $A'A''$ en $Q(Q')$, $PQ(P'Q')$ passe par R_1 . De même pour le point R. Si, par exemple, les tan-

gentes A' et A_1 coupent les tangentes T et T' en V et V' , W et W' , les droites VW' et WV' passent par R .

Des constructions dualistiques à celles de la fig. 2, nous ne relevons que la seconde, et nous l'effectuons dans la fig. 3

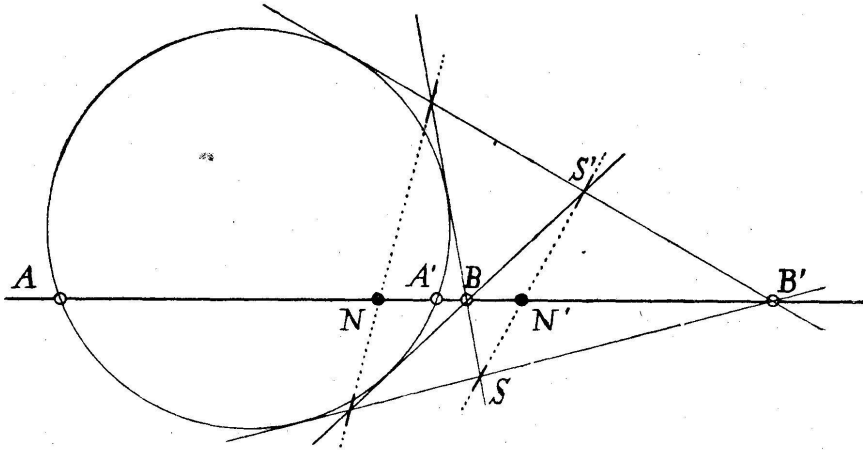


Fig. 3.

qui montre comment on trouve de façon très commode les points doubles d'une involution donnée par deux paires de points. On mène par une des paires — AA' dans la figure — un cercle quelconque et on lui mène depuis les points B et B' de la seconde paire, les quatre tangentes possibles, etc. Les points N et N' conjugués suivant le cercle, divisent harmoniquement la diagonale BB' du quadrilatère des tangentes, et sont les points cherchés.

Si deux tangentes forment un angle très obtus, leur point d'intersection qui, de plus, peut se trouver près du support, ne peut naturellement pas être employé dans une construction de quelque exactitude. Si l'un au moins des points doubles est obtenu avec sécurité, on construit l'autre en se servant des propriétés harmoniques du quadrilatère, ou du pôle du support suivant le cercle. Mais les remarques faites à propos de la fig. 2, prises dualistiquement, donnent aussi le moyen d'éviter des points d'intersection peu favorables de tangentes. X étant un point convenablement choisi de la droite SS' , XA coupe $BS(BS')$ en $P(P')$; XA' coupe $B'S(B'S')$ en $Q(Q')$. $PQ(P'Q')$ détermine alors sur le support de l'involution le second point double N .

Traduction de M. F. GONSETH (Zurich).