Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 20 (1918)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA « VARIÉTÉ MOYENNE » DE DEUX VARIÉTÉS CONVEXES

Autor: Tiercy, Georges

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-18029

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF: 27.11.2025** 

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# SUR LA «VARIÉTÉ MOYENNE» DE DEUX VARIÉTÉS CONVEXES

PAR

Georges Tiercy (Genève).

## § 1.

On connaît la définition de « corps moyen » de deux corps convexes donnés : soient  $C_1$  et  $C_2$  ces corps donnés ; on joint un point  $A_1$  de  $C_1$  à un point  $A_2$  de  $C_2$ ; on prend le point milieu M du segment  $(A_1 A_2)$ ; le lieu des points M est le corps moyen de  $C_1$  et  $C_2$ .

Les propriétés de ces « corps moyens » peuvent être établies analytiquement; il suffirait pour cela d'utiliser la

« théorie des corps convexes » de Minkowski 1.

Les démonstrations deviennent extrêmement simples, si l'on procède par voie géométrique. Je me suis d'ailleurs placé d'emblée dans l'espace à n dimensions; en cours de route, nous examinerons des cas de l'espace ordinaire. Comme cas particulier, nous envisagerons celui où toutes les droites servant à la construction de la variété moyenne ont une direction constante.

§ 2.

Soient donc deux variétés convexes,  $C_1$  et  $C_2$ ; la variété moyenne, que nous désignerons par (C), est aussi une variété convexe. Soit n le nombre des dimensions de ces variétés.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Minkowski. Gesammelte Abhandlungen, II, p. 131-260.

Pour construire la variété moyenne, procédons de la manière suivante :

Situons l'espace à n dimensions dans l'espace immédiatement supérieur à (n+1) dimensions; concevons que la variété  $C_4$  soit située dans le (n-plan) défini par l'équation :

$$x_{n+1} = 0 ,$$

tandis que la variété  $C_2$  serait située dans le (n-plan) défini par l'équation :

$$x_{n+1}=2\alpha.$$

Considérons alors la plus petite variété convexe contenant les deux variétés proposées; et coupons cette variété à (n+1) dimensions par le (n-plan) défini par l'expression :

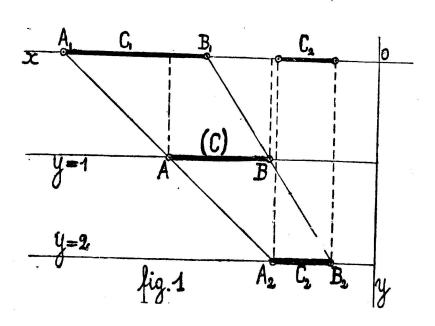
$$x_{n+1} = \alpha$$
.

L'intersection donne une variété à n dimensions; c'est la « variété moyenne » de  $C_1$  et  $C_2$ .

Prenons d'abord quelques exemples.

a) Premier exemple. Soit le cas de (n=1); les deux variétés données sont donc deux segments de droite, portés sur une droite indéfinie représentant l'espace à une dimension. Situons cette droite dans un plan, l'axe auxiliaire étant perpendiculaire à la droite; la variété  $C_4$  sera portée par l'axe des x lui-même, tandis que la variété  $C_2$  sera située sur la droite définie par :

$$y=2$$
. (avec  $\alpha=1$ )

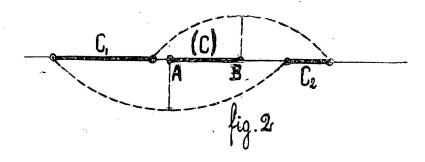


La plus petite variété convexe à (n+1) dimensions contenant les segments  $C_1$  et  $C_2$  est le trapèze  $(A_1B_1B_2A_2)$ . Coupons ce trapèze par la droite :

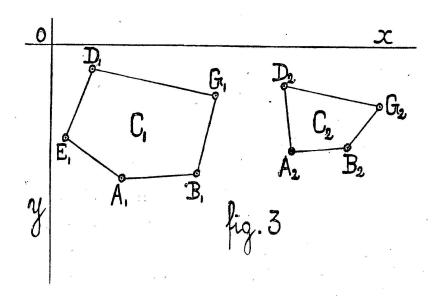
$$y=1$$
;

on obtient le segment (AB); c'est la variété moyenne des deux segments proposés. Il n'y a plus qu'à revenir à l'espace à une dimension, par une simple translation du segment (AB) parallèlement à l'axe des y.

On aurait obtenu le même résultat en suivant la définition initiale: prendre le milieu de toute droite unissant un point d'une des variétés proposées à un point de l'autre variété. On constatera (fig. 2) pour ce premier exemple



que les points extrêmes A et B sont les milieux des droites joignant, dans l'espace donné, les points extrêmes des variétés C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub>; et cela d'une seule manière.



En outre, remarquons que la valeur du segment (C) est égale à la moyenne arithmétique des valeurs des segments  $C_1$  et  $C_2$ .

b) Autre exemple. Prenons le cas de (n=2); et consi-

dérons deux polygones plans, chacun ayant une orientation bien déterminée par rapport aux axes de référence.

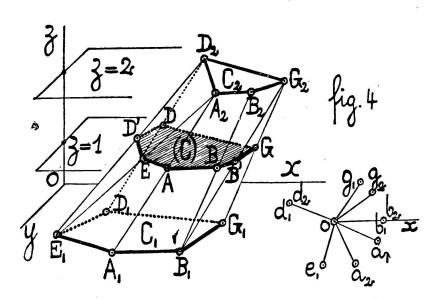
Plaçons cet espace à deux dimensions dans l'espace à trois dimensions; l'axe auxiliaire étant perpendiculaire au plan des polygones donnés; la variété C<sub>1</sub> restera dans le plan:

z=0;

la variété C2 sera située dans le plan :

z=2;

mais elle gardera son orientation par rapport aux axes des x et des y.



Le plus petit volume convexe limité par les bases  $C_1$  et  $C_2$  est un prismatoïde; ses faces latérales sont des trapèzes ou des triangles; on aura un trapèze lorsque les polygones  $C_1$  et  $C_2$  présenteront deux côtés parallèles; par exemple, les côtés  $(A_1B_1)$  et  $(A_2B_2)$  fournissent un trapèze, de même que les côtés  $(D_1G_1)$  et  $(D_2G_2)$ ; quant aux triangles, on les obtiendra en étudiant l'orientation des différents côtés des variétés proposées par rapport à l'un des axes de référence; on prendra successivement comme bases des triangles latéraux, les côtés indiqués par la « rose d'orientation » (fig. 4); on comprend ici l'importance de la conservation de l'orientation, respective des variétés  $C_1$  et  $C_2$ .

Coupons ce prismatoïde par le plan:

z=1;

on obtient un polygone (ABB'GDD'E); c'est la variété moyenne des deux variétés proposées.

On revient alors à l'espace à deux dimensions par une translation du polygone obtenu parallèlement à l'axe des z. La construction est facile; il suffit de la faire en perspective cavalière exacte.

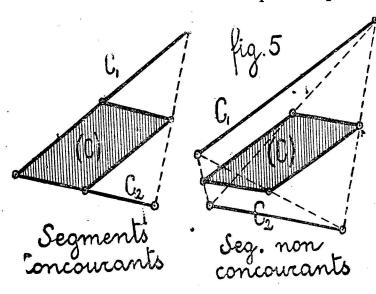
En opérant directement sur la figure (3) à deux dimensions, d'après la définition initiale (qui consiste à prendre le milieu de toute droite unissant un point de  $C_4$  à un point de  $C_2$ , dans l'espace où ces figures sont placées), le lecteur obtien dra le même résultat; c'est évident, car cela revient à ne considérer que la projection orthogonale de la figure (4) sur le plan xy.

On voit immédiatement que : 1° les points extrêmes de la variété solution, ou sommets, sont les milieux de droites joignant des points extrêmes des figures données; il ne saurait en être autrement;

 $2^{\circ}$  la longueur du pourtour du polygone (C) est la moyenne arithmétique des longueurs des pourtours de  $C_1$  et  $C_2$ .

c) Remarque I. Comme cas particulier de ce deuxième exemple, considérons celui où les polygones  $C_1$  et  $C_2$  se réduisent à deux segments rectilignes, concourants ou non. La variété moyenne est alors un parallélogramme, dont l'un des angles est égal à l'angle formé par les directions de  $C_1$  et  $C_2$ .

On a les dessins suivants dans l'espace E2:



Si l'on utilise l'espace à trois dimensions, la variété moyenne cherchée sera l'intersection, par le plan (z=1), d'un tétraèdre, dont l'arête  $C_1$  sera dans le plan primitif (z=0) et dont l'arête  $C_2$  sera dans le plan (z=2); on sait que cette section est un parallélogramme, dont les côtés ont pour valeurs respectives  $\left(\frac{C_1}{2}\right)$  et  $\left(\frac{C_2}{2}\right)$ .

Remarque II. Ce qui précède s'étend immédiatement au cas où les variétés  $C_1$  et  $C_2$  sont des surfaces planes convexes quelconques. La variété moyenne sera une surface plane convexe; et le pourtour de cette variété aura pour valeur la moyenne arithmétique des longueurs des pourtours de  $C_1$  et  $C_2$ .

Revenons au cas général de deux variétés convexes  $C_1$  et  $C_2$  à n dimensions. La représentation graphique n'est plus possible; peu importe; le processus géométrique indiqué permet d'établir les propriétés fondamentales de la variété moyenne.

On a donc situé les variétés  $C_1$  et  $C_2$  dans l'espace immédiatement supérieur, à (n+1) dimensions : la variété  $C_4$  dans le (n-plan) défini par :

$$x_{n+1}=0 ,$$

et la variété C<sub>2</sub> dans le (n — plan)

$$x_{n+1}=2\alpha ,$$

en conservant leur orientation respective. On a alors considéré la plus petite variété convexe à (n+1) dimensions contenant  $C_1$  et  $C_2$ ; et l'on a coupé cette variété par le (n-plan)

$$x_{n+1} = \alpha .$$

L'intersection donne la variété moyenne cherchée, variété convexe à n dimensions.

On établit alors aisément les remarques suivantes :

a) A tout couple de points,  $A_1$  de  $C_1$  et  $A_2$  de  $C_2$ , correspond un point de la variété moyenne (C). Si les deux points  $A_1$  et  $A_2$  sont des points intérieurs de  $C_1$  et  $C_2$ , le point milieu A de  $(A_1A_2)$  est un point intérieur de la variété (C).

Inversement, à chaque point intérieur A de (C) correspond au moins un couple de points, A<sub>4</sub> de C<sub>4</sub> et A<sub>2</sub> de C<sub>2</sub>.

b) Supposons que  $A_1$  soit un point intérieur de  $C_1$ , et que  $A_2$  soit un point frontière de  $C_2$ ; le point A ne saurait alors être qu'un point intérieur de (C). En effet, imaginons, tracée autour du point  $A_1$ , une petite (n-variété) convexe V entièrement comprise dans l'intérieur de  $C_1$ ; et considérons, dans l'espace à (n+1) dimensions, un cône de sommet  $A_2$  et dont la base serait cette variété V. L'intersection de ce [(n+1)-cône] par le (n-plan)

 $z = \alpha$ 

appartient tout entière à la variété (C), et contient le point A dans son intérieur.

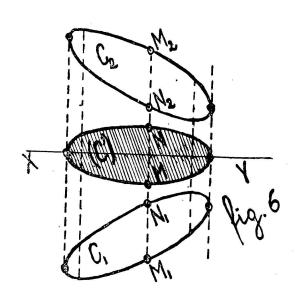
c) Chaque point F de la frontière de la variété (C) correspond au moins à un couple de points  $F_1$  et  $F_2$  des variétés  $C_1$  et  $C_2$ ,  $F_1$  étant sur la frontière de  $C_1$  et  $F_2$  sur la frontière de  $C_2$ . En effet, d'après la remarque b, aucun des points  $F_1$  et  $F_2$  ne saurait être un point intérieur.

d) Si un point E de (C) est un point extrême de la variété moyenne, les points  $E_1$  et  $E_2$ , qui lui correspondent, sont, non seulement des points « frontière », mais encore des points extrêmes de  $C_1$  et  $C_2$ ; en outre, au point E ne correspond qu'un seul couple de points  $E_1$  et  $E_2$ . Cette remarque résulte immédiatement de la définition des « points extrêmes ».

COROLLAIRE. Si l'on relie un point frontière  $F_1$  quelconque de  $C_1$  à un point frontière  $F_2$  quelconque de  $C_2$ , le point milieu de la droite  $(F_1F_2)$  n'est pas forcément sur la frontière de (C). Par exemple, dans le cas de (n=2), si l'on prend un point de  $C_1$  situé sur  $(E_1A_1)$  et un point de  $C_2$  situé sur  $(B_2G_2)$ , le milieu de la droite qui joint ces deux points est à l'intérieur du polygone (C). (Voir fig. 3 et 4.)

§ 3.

Considérations relatives au cas de (n=2) et au cas de (n=3). Considérons deux courbes convexes, planes, orthogonalement symétriques l'une de l'autre par rapport à un axe (XY); traçons toutes les cordes  $(M_4N_4N_2M_2)$  perpendiculaires à l'axe (XY); et marquons (fig. 6) les points mi-



lieux M et N des segments  $(M_1 N_2)$  et  $(N_1 M_2)$ . On construit ainsi une courbe (C') convexe, qu'on peut appeler : courbe moyenne de  $C_1$  et  $C_2$  relative à la direction (XY).

Cette courbe (C') n'est pas identique à la courbe moyenne générale (C), définie précédemment; son pourtour est plus petit que celui de (C), et elle est entièrement située à l'inté rieur de (C);

nous démontrerons ce détail dans la remarque I.

D'autre part, d'après ce que nous avons établi, la courbe (C) a le même pourtour que chacune des courbes symétriques  $C_1$  et  $C_2$ ; en effet, le pourtour de (C) est égal à la moyenne arithmétique des pourtours de  $C_1$  et  $C_2$ , et ces deux derniers ont la même longueur.

Si donc on appelle p la valeur du pourtour de chacune des courbes données,  $\mathcal L$  le pourtour de la courbe moyenne (C') relative à la direction (XY), et P le pourtour de la courbe moyenne générale (C), on a les relations :

$$\mathfrak{T} \leq P$$
;  $P = p$ ;  $\mathfrak{T} \leq p$ .

On a donc établi que le périmètre de la courbe (C') est plus petit que celui des courbes proposées, ou lui est au plus égal.

Or, remarquons que la courbe (C') n'est pas autre chose

que la « transformée de Steiner de la courbe  $C_4$  relativement à une direction perpendiculaire sur  $(XY)^4$ »; on l'obtient en portant sur toutes les cordes  $(M_4N_4)$  prolongées, de part et d'autre de l'axe (XY), la moitié de la longueur  $(M_4N_4)$ . On démontre ainsi que la « transformée de Steiner relative à la direction  $(M_4N_4)$ » a en général un pourtour plus petit que celui de la courbe primitive  $C_4$ .

Pour que le pourtour de (C') soit égal à celui de C<sub>1</sub>, on voit immédiatement la condition : il faudrait que la courbe

C, ait un axe de symétrie parallèle à (XY).

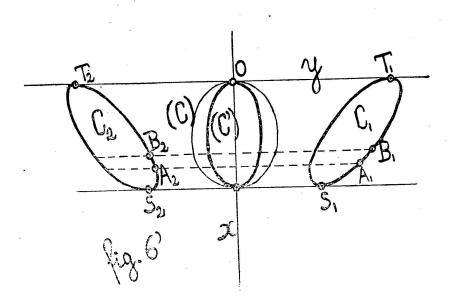
Remarquons d'ailleurs que l'aire de la courbe est conser-

vée, quelle que soit la courbe convexe C1.

Remarque I. Nous avons dit que le pourtour de la courbe (C') est plus petit que celui de la courbe (C), et par conséquent plus petit que celui de chacune des courbes symétriques données. Etablissons ce théorème, géométriquement et par le calcul.

Prenons la droite (XY) comme axe des x, et une des tan-

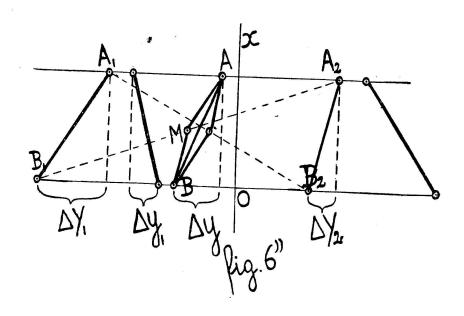
gentes communes comme axe des y (fig. 6').



Géométriquement: Cela résulte de la construction même des courbes (C) et (C'). Prenons en effet deux petits arcs cor-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> STEINER. Œuvres, II, p. 264-267.

respondants  $\widehat{A_1}$  et  $\widehat{A_2}$   $\widehat{B_2}$  (fig. 6'). Si on les assimile à des segments de droites (fig. 6"), et qu'on cherche les variétés



(C) et (C') déduites de ces segments, on a :

$$\overline{AB} < \overline{AM} + \overline{MB}$$
 .

On étend immédiatement à la courbe entière. Par le calcul: Soient

$$y = y_1(x)$$
 et  $y = Y_1(x)$ 

les équations des deux branches  $\widehat{S_1T_1}$  de la courbe  $C_1$ , la fonction  $Y_1(x)$  se rapportant à l'arc extérieur. Les équations de la courbe  $C_2$  seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = Y_2(x) = -y_1(x) , \\ y = y_2(x) = -Y_1(x) , \end{array} \right.$$

 $Y_2(x)$  se rapportant à l'arc intérieur  $\widehat{S_2T_2}$ .

On a alors, en désignant toujours par p le pourtour de C, et de  $C_2$ , et par P celui de la courbe moyenne générale (C):

$$\begin{cases}
P = p = \int \sqrt{1 + Y_1'^2} dx + \int \sqrt{1 + Y_1'^2} dx \\
= \int \sqrt{1 + Y_1'^2} dx + \int \sqrt{1 + Y_1'^2} dx
\end{cases}$$

Quant à la courbe moyenne (C') relative à la direction (Ox), courbe dont le pourtour est désigné par  $\mathcal{Z}$ , il vient :

$$\Delta y = \frac{\Delta Y_1 + \Delta Y_2}{2}; \qquad (fig. 6'')$$

$$y' = \frac{Y_1' + Y_2'}{2};$$

$$\mathcal{L} = 2 \int \sqrt{1 + \left(\frac{Y_1' + Y_2'}{2}\right)^2} dx.$$

On vérifie immédiatement qu'on a :

$$\mathfrak{T} \leq P$$
.

Pour qu'il y ait égalité (2 = P), on voit qu'il faudrait :

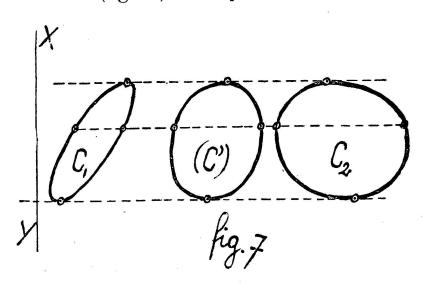
$$Y_{\mathbf{1}}'(x) = Y_{\mathbf{2}}'(x) ,$$

c'est-à-dire:

$$Y_1(x) = Y_2(x) + K ,$$

K étant une constante. Autrement dit : les courbes  $C_1$  et  $C_2$  devraient présenter un axe de symétrie parallèle à (Ox). C'est également ce qu'indique le raisonnement géométrique basé sur les fig. 6' et 6".

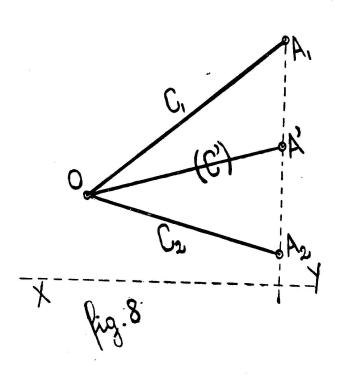
Remarque II. Plus généralement, toutes les fois que deux courbes convexes C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub> sont comprises entre deux tangentes parallèles (fig. 7), on peut considérer la courbe



moyenne (C') relative à la direction (XY) perpendiculaire à celle des tangentes.

Dans ce cas, la courbe (C') n'a pas d'axe de symétrie orthogonale.

Application de cette remarque: Considérons le cas où les courbes  $C_1$  et  $C_2$  se réduisent à deux segments de droites concourants (fig. 8). Joignons les extrémités  $A_1$  et  $A_2$ , et cherchons la variété moyenne (C') de  $C_1$  et  $C_2$  relative à la



direction (XY) perpendiculaire à la droite (A<sub>1</sub> A<sub>2</sub>). Les variétés proposées ne sont symétriques l'une de l'autre par rapport à aucun axe (symétrie orthogonale). La variété moyenne (C') obtenue n'est alors autre chose que la médiane (OA') du triangle (OA<sub>1</sub> A<sub>2</sub>).

Considérons maintenant, dans l'espace E<sub>3</sub>, deux corps convexes quelconques C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub>, symétriques

l'un de l'autre par rapport au plan  $\pi$  (la fig. 6 peut encore servir; il suffit de poser que le plan  $\pi$  est représenté par sa trace XY sur le plan du dessin). En opérant comme dans le cas de (n=2), on construit un volume convexe (C'), qu'on peut appeler : « Corps moyen de  $C_1$  et  $C_2$  relativement au plan  $\pi$  ».

Ce corps (C') est tout entier contenu dans le corps moyen général (C) précédemment défini; cela résulte des définitions mêmes de (C) et (C'). D'ailleurs, on vérifie aisément que la surface de (C') est plus petite que celle de  $C_1$ ; soient en effet (fig. 6'):

$$z = Z_1(x, y)$$
,  $z = z_1(x, y)$ ,

les équations des deux portions  $\widehat{S_1T_1}$  de la surface de  $C_1$ , la fonction  $Z_1(x, y)$  donnant la portion extérieure. Soient encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = Z_{2}(x\,,\,y) = -z_{1}(x\,,\,y) \;, \\ z = z_{2}(x\,,\,y) = -Z_{1}(x\,,\,y) \;, \end{array} \right.$$

les équations des deux portions  $\widehat{S_2T_2}$  de la surface de  $C_2$ , la fonction  $Z_2(x,\,y)$  se rapportant à la portion intérieure.

Désignons par s la surface de C<sub>1</sub> ou de C<sub>2</sub>; et S celle de la

variété (C'). Posons ensuite :

$$\left(\begin{array}{ccc}
\frac{\partial Z_1}{\partial x} = P_1, & \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} = P, & \left(\frac{\partial Z_2}{\partial x} = P_2, \\
\frac{\partial Z_1}{\partial y} = Q_1; & \left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} = q; & \left(\frac{\partial Z_2}{\partial y} = Q_2; \right)\right)
\right)$$

il vient:

$$\begin{cases} s = \int \int \left[ \sqrt{1 + P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{1 + p^2 + q^2} \right] dx dy \\ = \int \int \left[ \sqrt{1 + P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{1 + P_2^2 + Q_2^2} \right] dx dy \end{cases}$$

Puis, pour la variété (C'):

$$\begin{split} z_{x}^{'} &= \frac{\mathrm{P_{1}} + \mathrm{P_{2}}}{2} \; ; \qquad z_{y}^{'} &= \frac{\mathrm{Q_{1}} + \mathrm{Q_{2}}}{2} \; ; \\ \mathcal{S} &= 2 \int \int \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{P_{1}} + \mathrm{P_{2}}}{2}\right)^{2} + \left(\frac{\mathrm{Q_{1}} + \mathrm{Q_{2}}}{2}\right)^{2}} \, dx \, dy \; . \end{split}$$

Or, ce corps (C') n'est pas autre chose que le « transformé de Steiner de la variété  $C_1$  relativement à une direction perpendiculaire au plan  $\pi$  » (voir Œuvres de Steiner, II, p. 302); on l'obtient en portant sur toutes les cordes  $(M_1N_1)$  prolongées, et de part et d'autre du plan  $\pi$ , la moitié de la longueur du segment  $(M_1N_1)$ . Il en résulte que le « transformé de Steiner de la variété  $C_1$  relativement à une direction  $(M_1N_1)$  d'ailleurs quelconque » a en général une surface plus petite que celle des variétés symétriques proposées.

Pour que la surface soit la même, il faudrait :

$$P_1 = P_2$$
 et  $Q_1 = Q_2$ ;

c'est-à-dire:

$$Z_1(x, y) = Z_2(x, y) + K,$$

avec K = constante; il faudrait donc que le corps  $C_1$  présente un plan de symétrie parallèle au plan  $\pi$ ; l'opération de Steiner reviendrait alors à déplacer le corps  $C_1$  en translation, perpendiculairement à son plan de symétrie.

Remarque I. On verrait facilement que la variété (C') a le même volume que  $C_1$  ou  $C_2$ .

Remarque II. Pour pouvoir appliquer l'opération (C'), il n'est point nécessaire que les corps  $C_1$  et  $C_2$  soient symétriques l'un de l'autre par rapport à un certain plan  $\pi$ ; il suffit qu'ils soient convexes et inscrits dans un même cylindre. Mais alors, le corps moyen (C'), relatif au plan  $\pi$  normal aux génératrices du cylindre, ne présente plus de plan de symétrie orthogonale.

Remarque III. On pourra de même, dans l'espace  $E_n$  à n dimensions, construire une variété (C') correspondant aux deux variétés  $C_1$  et  $C_2$ , lorsque ces dernières seront orthogonalement symétriques l'une de l'autre par rapport à un certain (n-plan)  $\pi$ .

§ 4.

Combinaison sommatoire géométrique de deux variétés  $C_1$  et  $C_2$  dans l'espace  $E_n$ .

Considérons la variété moyenne (C) générale de  $C_1$  et  $C_2$ . Et construisons une variété semblable (V) avec un rapport de proportionnalité égal à 2. Cette variété (V) présente toutes les arêtes de  $C_1$  et toutes celles de  $C_2$ , en grandeur et orientation; de même, on y trouve toutes les faces de  $C_1$  et celles de  $C_2$  en vraie grandeur (il y a, en plus, d'autres faces « de liaison »).

On obtiendrait le même résultat si l'on cherchait à construire directement la plus petite variété convexe possible présentant toutes les arêtes de C<sub>1</sub> et toutes celles de C<sub>2</sub> en grandeur et en orientation, et seulement ces arêtes (elles peuvent d'ailleurs figurer plusieurs fois).

Nous pouvons appeler cette variété (V) la « somme géométrique de  $C_1$  et  $C_2$ ; ou plutôt, afin d'éviter toute confusion avec la terminologie employée dans la théorie des vecteurs, nous dirons : « Combinaison sommatoire géométrique » des variétés  $C_1$  et  $C_2$ .

Exemple: Si on a deux sphères de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , la variété (V), qui leur correspond, est une sphère de rayon  $(R_1 + R_2)$ .

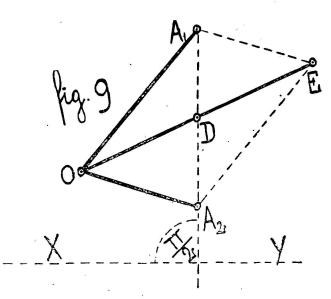
Il est évident que cette variété (V) possède, relativement aux variétés primitives  $C_1$  et  $C_2$ , les mêmes propriétés que la variété moyenne générale (C).

On pourra construire de même une « combinaison sommatoire (V') relative à un certain  $(n - plan) \pi$  » chaque fois que les variétés  $C_1$  et  $C_2$  seront inscrites dans un cylindre dont les génératrices seront normales à  $\pi$ ; cette variété (V') sera semblable à la variété (C'), le rapport de proportionnalité étant 2.

Exemple (avec n=2) conduisant à la résultante de deux vecteurs :

Soient C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub> deux segments de droites concourants (fig. 9); et construisons la variété moyenne (C') relative à la direction (XY); on obtient la médiane (OD) du triangle (OA<sub>1</sub> A<sub>2</sub>).

Si on la double, on obtient la diagonale (OE) du parallélogramme construit sur (OA<sub>4</sub>) et (OA<sub>2</sub>).



D'où l'énoncé: La résultante de deux vecteurs  $(OA_1)$  et  $(OA_2)$ , ou somme géométrique ordinaire de ces deux vecteurs, n'est autre chose que la « combinaison sommatoire géométrique (V'), relativement à la direction (XY), des deux segments  $(OA_4)$  et  $(OA_2)$  ».

Genève, juillet 1915.