L'arithmogéométrie sur les courbes et les surfaces transcendantes. Généralisation de l'arithmogéométrie.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

(5e et dernier article) [1]

L'arithmogéométrie sur les courbes et les surfaces transcendantes. Généralisation de l'arithmogéométrie.

101. — L'étude des arithmopoints des courbes ou des surfaces transcendantes est assez naturelle après les considérations qui précèdent, mais les principes qui permettent de rechercher certaines solutions des équations ordinaires de l'analyse indéterminée, tels que ceux qui sont à la base des travaux de FERMAT ou d'EULER, par exemple, ne sont plus d'aucune utilité dans le domaine des équations transcendantes. Ici, plus de fil directeur, plus de généralités possibles sur les relations entre les solutions. Seules quelques équations très spéciales de l'analyse transcendante ont pu jusqu'ici être soumises à des recherches arithmotrigonométriques.

De ces très rares équations indéterminées transcendantes douées de solutions rationnelles, que nous connaissons présentement, les deux plus anciennes semblent encore avoir

---

[1] Voir l'*Enseignement mathématique*, 18e année, 15 mars 1916, pp. 81-110, et 15 novembre 1916, pp. 397-428; 19e année, 15 mai 1917, pp. 159-191 et juillet-septembre-novembre 1917, pp. 233-272.

Voir aussi *Le problème de Léonard de Pise et de Jean de Palerme*, dans *L'Enseignement Mathématique,* 17e année, septembre-novembre 1915, pp. 315-324; et une Note *Au sujet d'un article de M. A. Gérardin*, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, [4e], t. XVIII, février 1918, pp. 43-49.

Une erreur s'est glissée dans mon précédent article, à l'occasion de la démonstration de l'impossibilité de l'équation arithmotrigonométrique $\sin u + \sin v = 1$; le résultat est exact. J'aurai très prochainement l'occasion de revenir sur cette question.

été primitivement envisagées par L. EULER; mais il ne s'agit nullement ici de spéculations du genre de celles qui font l'objet des mémoires dont la réunion a constitué les admirables *Commentationes arithmeticæ;* il ne s'agit plus, dis-je, de questions arithmétiques et c'est dans de tout autres circonstances que ces deux équations ont été mentionnées par EULER.

L'une des deux équations auxquelles je fais allusion est la suivante :

$$\text{arc tang}\, x + \text{arc tang}\, y = \frac{\pi}{4} ;$$

elle admet la solution $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$, d'après la relation d'EULER :

$$\text{arc tang}\, \frac{1}{2} + \text{arc tang}\, \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} .$$

L'autre, beaucoup plus importante, est l'équation :

$$x^y = y^x ;$$

elle représente une courbe transcendante douée d'une infinité d'arithmopoints, au sujet desquels L. EULER s'étend assez longuement, dans un passage qui mérite d'être cité presque intégralement :

« Telle est la courbe comprise dans l'équation :

$$x^y = y^x ;$$

« on voit bien sur-le-champ que l'appliquée y est constam-
« ment égale à l'abscisse x, de sorte que la ligne droite
« inclinée à l'axe sous un angle demi-droit satisfait à l'équa-
« tion. Il est cependant visible que l'équation proposée a
« une signification plus étendue que celle de la ligne droite
« $y = x$, et que par conséquent celle-ci ne peut exprimer
« tout ce que contient l'autre $x^y = y^x$; car on peut satisfaire
« aussi à cette dernière sans que x soit égal à y. Par exemple,
« si $x = 2$, y peut être égal à 4 ; ... nous aurons :

$$x = t^{\frac{1}{t-1}} , \qquad y = t^{\frac{t}{t-1}} \ldots$$

« Il y a donc une infinité de nombres x et y qui, pris deux « à deux, peuvent satisfaire à l'équation $x^y = y^x$; tels sont « les nombres suivants, *en s'en prenant à ceux qui sont* « *rationnels :*

$$x = 2\,, \qquad y = 4\,,$$

$$x = \frac{9}{4}\,, \qquad y = \frac{27}{8}\,,$$

$$x = \frac{64}{27}\,, \qquad y = \frac{256}{81}\,,$$

$$x = \frac{625}{256}\,, \qquad y = \frac{3125}{1024} \quad \text{etc.} \ldots$$

« Quoi qu'il y ait, dans ces courbes et dans les autres « semblables, une infinité de points qui peuvent être dimi- « nués algébriquement, elles ne peuvent cependant être « mises au nombre des courbes algébriques, parce qu'elles « renferment une infinité d'autres points qu'il est impossible « d'aligner d'une manière semblable [1]. »

102. — La propriété de la courbe d'équation $x^y = y^x$ d'admettre les arithmopoints semble avoir été l'origine de deux questions concernant la courbe transcendante représentée par l'équation [2]

$$(x + 1)^y = x^{y+1} + 1\,,$$

douée des arithmopoints de coordonnées $(x = 1,\ y = 1)$, $(x = 2,\ y = 2)$ et de tous les arithmopoints de l'axe Oy $(x = 0,\ y$ quelconque), ainsi que la courbe [3] d'équation

$$x^y = y^x + 1\,,$$

qui est douée elle aussi des arithmopoints de coordonnées $(x = 2,\ y = 2)$, $(x = 3,\ y = 2)$ et de tous les arithmopoints de l'axe Ox.

D'autre part, la relation d'Euler :

$$\text{arc tang}\,\frac{1}{2} + \text{arc tang}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}\,,$$

[1] *Introduction à l'Analyse infinitésimale,* par Léonard Euler, trad. J.-B. Labey, t. II, imprimé en 1797, p. 297-298.

[2] *Nouvelles Annales de Mathématiques,* [2], t. XV, 1876, p. 144 et p. 545-547.

[3] Ibid., [2], t. XIV, 1875, p. 288, et [2], t. XV, 1876, p. 44-46.

et celles analogues de VÉGA et de MACHIN :

$$2 \text{arc tang} \frac{1}{3} + \text{arc tang} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{(Véga)}$$

$$4 \text{arc tang} \frac{1}{5} - \text{arc tang} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{(Machin)}$$

ont donné lieu à divers travaux.

Une question posée, au sujet de ces relations d'EULER, de VÉGA et de MACHIN dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*[1], a provoqué la publication de toute une série de Mémoires importants de M. Carl STÖRMER[2], concernant des équations de cette nature.

M. C. STÖRMER a notamment démontré que, en outre des solutions d'EULER, de VÉGA et de MACHIN, l'équation

$$m \text{ arc tang} \frac{1}{x} + n \text{ arc tang} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4},$$

n'admet en nombres entiers qu'une seule solution nouvelle :

$$2 \text{arc tang} \frac{1}{2} - \text{arc tang} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}.$$

M. E.-B. ESCOTT[3] a d'autre part rappelé l'existence des recherches de GAUSS dans cet ordre d'idées et il a en outre

[1] Question n° 377 (S. Gravé), t. I, 1894, p. 228.

[2] Carl STÖRMER, *Solution complète en nombres entiers* m, n, x, y, *et* k *de l'équation*

$$m \text{ arc tang} \frac{1}{x} + n \text{ arc tang} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}.$$

(Christiania Videnskabsselskabschrifter, 1895.)

Sur les solutions entières $x_1 \dots x_n \dots \varkappa_1 \dots \varkappa_n$, k, *de l'équation :*

$$x_1 \text{ arc tang} \frac{1}{\varkappa_1} + x_2 \text{ arc tang} \frac{1}{\varkappa_2} + \dots + x_n \text{ arc tang} \frac{1}{\varkappa_n} = k \frac{\pi}{4}.$$

(C. R., t. CXXII, 27 janvier 1896, p. 175-177.)
(» » et 3 février 1896, p. 225-227.)

Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes à la solution en nombres rationnels de l'équation

$$c_1 \text{ arc tang } x_1 + \dots + c_n \text{ arc tang } x_n = k \frac{\pi}{4}.$$

(Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Christiania, 1896.)

Solution complète en nombres entiers de l'équation :

$$m \text{ arc tang} \frac{1}{x} + n \text{ arc tang} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}.$$

(Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXVII, 1899, p. 160-170.)

[3] *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, 1896. t. 3, p. 276.

indiqué une formule intéressante :

$$\frac{\pi}{4} = 22 \text{arc tang} \frac{1}{28} + 2 \text{arc tang} \frac{1}{445} - 5 \text{arc tang} \frac{1}{1393} - 10 \text{ arc tang} \frac{1}{11018} .$$

Il convient enfin de signaler ici l'existence d'arithmopoints sur la courbe logistique : cette proposition négative, concernant l'impossibilité en nombres rationnels de l'équation

$$e^x = y ,$$

a été établie en 1882 par F. LINDEMANN [1]. Elle a donné lieu tout récemment à un très intéressant travail de MM. G. N. BAUER et H. L. SLOBIN « *Some transcendental Curves and Numbers* » [2].

Il est vraisemblable que la liste précédente des travaux où se trouvent des résultats susceptibles d'être rattachés à l'arithmogéométrie des courbes et des surfaces transcendantes est loin d'être complète ; en tous cas, leur nombre est certainement encore restreint.

103. — GÉNÉRALISATION DE L'ARITHMOGÉOMÉTRIE. — La même remarque s'applique aussi aux recherches faites autour d'une généralisation importante et naturelle de l'arithmogéométrie dont la première manifestation se trouve dans des travaux de Ang. GENOCCHI.

G. LAMÉ [3] avait, en 1840, publié un remarquable mémoire sur un cas particulier du dernier théorème de Fermat ; il avait établi l'impossibilité en nombres entiers de l'équation indéterminée :

$$x^7 + y^7 = z^7 ;$$

A. CAUCHY [4], M. LEBESGUE [5] et le P. PÉPIN [6] avaient à cette

---

[1] *Ueber die Zahl* π, Mathematische Annalen, XX, 1882, S. 213-225.

[2] Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, XXXVI, 1913, p. 327-337.

[3] G. LAMÉ. *Mémoire d'Analyse indéterminée démontrant que l'équation* $x^7 + y^7 = z^7$ *est impossible en nombres entiers*, Journal de Mathématiques pures et appliquées (de Liouville), [1], t. V, 1840, pp. 195-211.

[4] A. CAUCHY. Rapport sur le Mémoire précédent (ibid.), p. 211-215 ; cf. aussi C. R., t. IX, 16 septembre 1839, p. 359-363.

[5] M. LEBESGUE. *Démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation* $x^7 + y^7 + z^7 = 0$ *en nombres entiers* (Journal de Mathématiques pures et appliquées (de Liouville), [1], t. V, 1840, p. 276-279.

[6] Le P. PÉPIN. *Impossibilité de l'équation* $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, C. R., t. LXXXII, 1876, p. 676-679 et 743-747. Cette impossibilité est ici rattachée à celle d'une équation $x^4 + 7^3y^4 = \square$ appartenant à une famille plus étendue d'équations étudiées par Edouard LUCAS.

occasion présenté quelques remarques et simplifié la démonstration de G. LAMÉ.

Poussant plus loin l'analyse de cette équation particulière de Fermat, A. GENOCCHI établit que, non seulement, *elle est impossible en nombres entiers, mais aussi en prenant pour* x, y, z *les racines d'une même équation du troisième degré à coefficients rationnels;* cette impossibilité est rattachée à celle de l'équation

$$x^4 + 6x^2 - \frac{1}{7} = \square ,$$

en nombres rationnels [1].

104. — La propriété négative de l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, de ne point posséder non seulement des arithmopoints, mais encore des points dont les coordonnées homogènes x, y et z soient exprimables par les racines d'une même équation cubique rationnelle, doit être considérée comme le premier théorème d'une généralisation de l'arithmogéométrie : cette nouvelle branche de l'étude géométrique d'une équation indéterminée de l'analyse diophantine aurait pour objet la recherche de ceux des points particuliers d'une courbe donnée, représentée au moyen d'une équation rationnelle, par chacun desquels puisse passer une courbe de même nature, mais d'un degré moindre imposé a priori : les points situés sur une arithmodroite seraient précisément les arithmopoints de la courbe donnée; les points situés sur une conique constitueraient une seconde famille; la troisième famille serait celle des points situés sur une cubique d'équation rationnelle.

En d'autres termes, cette généralisation de l'arithmogéométrie consisterait à substituer à l'ensemble des nombres rationnels celui des nombres quadratiques, puis celui des nombres cubiques ou plus généralement celui des nombres appartenant à un certain domaine imposé de rationalité. Le programme d'une telle étude a été tracé dans un mémoire

---

[1] A. GENOCCHI. *Sur l'impossibilité de quelques équations doubles,* C. R., t. LXXVIII, 9 février 1874, p. 433-435. — *Généralisation du théorème de Lamé sur l'impossibilité de l'équation* $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, C. R., t. LXXXII, 1876, p. 910-913.

de H. Poincaré : *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*[1].

Généralisation par voie complexe.

105. — Dans les derniers paragraphes ci-dessus, j'ai rappelé quelques rares essais d'extension de l'arithmogéométrie, qui se rattachent tous à l'étude bien difficile des arithmo-points de courbes ou de surfaces transcendantes spéciales, ou encore à celle de ceux des points des courbes ou surfaces algébriques dont les coordonnées sont exprimables non plus rationnellement mais au moyen de nombres appartenant à un certain domaine imposé de rationalité.

Ce sont là deux directions bien distinctes vers lesquelles l'arithmogéométrie semble devoir s'orienter. Le grand intérêt qui est actuellement attaché au célèbre théorème de Fermat ne peut que provoquer des recherches arithmogéométriques autour des courbes spéciales d'ordre élevé, ou même d'ordre indéterminé, plus ou moins analogues aux laméennes. Les belles recherches de M. C. Störmer sont d'autre part de nature à faire naître le désir d'entreprendre des études semblables pour d'autres types d'équations transcendantes.

Ce sont là, je le répète, des questions qui seront certainement étudiées dans un avenir plus ou moins éloigné de nous.

A côté de ces deux extensions naturelles de l'arithmogéométrie, je crois devoir signaler enfin une troisième généralisation essentiellement différente des précédentes, car elle consiste en une prolongation de l'arithmogéométrie dans le domaine des grandeurs et des nombres imaginaires. De même, en effet, que la considération de ceux des éléments de certaines figures géométriques, qui sont repérés par des nombres rationnels, a pu présenter un certain intérêt, de même l'*étude des éléments réels des figures complexes* peut parfois conduire à des résultats qui, s'ils ne semblent

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (de Liouville), 5e série, t. 7, 1901, p. 161-233.