

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1918)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR CERTAINES IDENTITÉS VECTORIELLES ET LEUR  
INTERPRÉTATION DANS LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ET PLANE  
**Autor:** Daniëls, M.-Fr.  
**Kapitel:** VI  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18026>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

cond. Il s'ensuit que dans ce cas les  $Q'_i$  aussi sont collinéaires. q. e. d.

## VI

28. — Si l'on pose dans l'expression fondamentale du par. 24 pour satisfaire à la condition imposée aux  $\lambda_i, \mu_i \dots$

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = [\mathbf{c}\mathbf{a}'\mathbf{r}] & \lambda_2 = [\mathbf{a}\mathbf{b}'\mathbf{r}] & \lambda_3 = [\mathbf{b}\mathbf{c}'\mathbf{r}] \\ \mu_1 = [\mathbf{a}'\mathbf{b}\mathbf{r}] & \mu_2 = [\mathbf{b}'\mathbf{c}\mathbf{r}] & \mu_3 = [\mathbf{c}'\mathbf{a}\mathbf{r}] \end{array}$$

on trouve évidemment

$$\lambda_1 \mathbf{b} + \mu_1 \mathbf{c} = \mathbf{V}\mathbf{V}\mathbf{b}\mathbf{c} \mathbf{V}\mathbf{r}\mathbf{a}'$$

etc., mais si comme au par. 26 on remplace les vecteurs arbitraires  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \dots$  par  $\mathbf{V}\mathbf{b}\mathbf{c}, \mathbf{V}\mathbf{b}'\mathbf{c}', \dots$ , cette dernière expression devient, abstraction faite d'un facteur scalaire, facile à déterminer

$$\mathbf{V}\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}'$$

de sorte qu'on aboutit à l'identité entre *sept* vecteurs quelconques :

$$\begin{aligned} & [\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}][\mathbf{V}\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \quad \mathbf{V}\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{c}'\mathbf{a}' \quad \mathbf{V}\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{a}'\mathbf{b}'] \\ & - [\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'][\mathbf{V}\mathbf{a}' \cdot \mathbf{r}, \mathbf{b}\mathbf{c} \quad \mathbf{V}\mathbf{b}' \cdot \mathbf{r}, \mathbf{c}\mathbf{a} \quad \mathbf{V}\mathbf{c}' \cdot \mathbf{r}, \mathbf{a}\mathbf{b}] \equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{XII})$$

Cette identité nous servira d'abord à démontrer pour la sphère *un théorème de Möbius*<sup>1</sup> :

Soient  $A_i$  et  $A'_i$  deux triangles sphériques et l une droite sphérique quelconque.

Lorsque les droites  $p_i$  qui relient les points  $P_i \equiv (l, a_i)$  aux sommets  $A'_i$  du second triangle sont concourantes, il en est de même des droites  $p'_i$  qui relient les points  $P'_i \equiv (l, a'_i)$  aux sommets  $A_i$  du premier triangle.

Car, si le vecteur de la droite sphérique  $l$  est  $\mathbf{r}$  et si les vecteurs des sommets  $A_i$  et  $A'_i$  sont  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  et  $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$  nous aurons successivement pour les points  $P_i, P'_i$  et les droites  $p_i, p'_i$ :

$$P_i \equiv \mathbf{V}\mathbf{r}, \mathbf{b}\mathbf{c} \quad P'_i \equiv \mathbf{V}\mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}'$$

$$p_i \equiv \mathbf{V}\mathbf{a}', \mathbf{r}, \mathbf{b}\mathbf{c} \quad p'_i \equiv \mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' .$$

<sup>1</sup> *Crell's Journal*, Bd. 3, 1828. — Werke I, S. 444.

L'identité nous montre que les  $p_i$  sont concourantes lorsque les  $p'_i$  le sont. q. e. d.

2. Nous pouvons cependant tirer de notre identité un théorème tout différent en interprétant le vecteur  $\mathbf{r}$  non pas comme correspondant à une *droite* sphérique, mais comme appartenant à un *point* P. Le théorème en question est le suivant :

*Par un point quelconque de la surface sphérique P( $\mathbf{r}$ ) on mène des normales  $p_i$  et  $p'_i$  aux côtés  $a_i$  et  $a'_i$  de deux triangles sphériques et ensuite par les sommets  $A'_i$  et  $A_i$  des droites sphériques  $q_i$  et  $q'_i$  normales aux  $p_i$  et  $p'_i$ . Lorsque les  $q_i$  sont concourantes, il en est de même des  $q'_i$ .*

En effet on trouve dans ce cas pour les vecteurs des droites  $p_i$ ,  $p'_i$  et  $q_i$ ,  $q'_i$  immédiatement

$$\begin{array}{ll} p_i \equiv V\mathbf{r}, \mathbf{b}\mathbf{c} & p'_i \equiv V\mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \\ q_i \equiv V\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}\mathbf{c} & q'_i \equiv V\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' . \end{array}$$

Lorsque les  $q_i$  sont concourantes, le produit pseudo-scalaire du premier terme de notre identité s'annule ; la disparition du second terme qui en est la conséquence montre que dans ce cas les  $q'_i$  aussi sont concourantes et inversement. q. e. d.

3. Dans le cas-limite du *plan* nous aurons, quel que soit le point P, la droite  $p_i$  normale à  $a_i$  et  $q_i$  de nouveau normale à  $p_i$ , c'est-à-dire  $q_i$  *parallèle* au côté  $a_i$  du premier triangle. Le théorème qui, pour le plan, est dû à M. J. Neuberg<sup>1</sup>, peut être formulé :

*Etant donnés deux triangles plans  $A_i$  et  $A'_i$  et les droites  $q_i$  et  $q'_i$  menées par les sommets  $A'_i$  et  $A_i$  parallèles aux côtés  $a_i$  et  $a'_i$ ; lorsque les droites  $q_i$  sont concourantes, il en est de même des droites  $q'_i$ .<sup>2</sup>*

29. — Nous arrivons à une autre identité entre *sept* vecteurs en remplaçant  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}'$ , ... par  $V\mathbf{b}\mathbf{c}$ ,  $V\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ , ... , en posant ensuite

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = [\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{a}'] & \lambda_2 = [\mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{a}'] & \lambda_3 = [\mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{b}'] \\ \mu_1 = [\mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{b}'] & \mu_2 = [\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}'] & \mu_3 = [\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{a}'] . \end{array}$$

<sup>1</sup> *Mathesis*, 1882, p. 144, 1883, p. 86, 1914, p. 91.

<sup>2</sup> Voir par 23, 3.

Dans ce cas nous avons

$$\lambda_1 V_{\mathbf{ca}} + \mu_1 V_{\mathbf{ab}} = V_{\mathbf{a}}, V_{\mathbf{ra'}} V_{\mathbf{bc}}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}]^2[V_{\mathbf{a}}, V_{\mathbf{ra'}} V_{\mathbf{bc}} - V_{\mathbf{b}}, V_{\mathbf{rb'}} V_{\mathbf{ca}} - V_{\mathbf{c}}, V_{\mathbf{rc'}} V_{\mathbf{ab}}] \\ + [\mathbf{abc}]^2[V_{\mathbf{a}'}, V_{\mathbf{ra}} V_{\mathbf{b}'\mathbf{c}'} - V_{\mathbf{b}'}, V_{\mathbf{rb}} V_{\mathbf{c}'\mathbf{a}'} - V_{\mathbf{c}'}, V_{\mathbf{rc}} V_{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}] \equiv 0.$$

Nous n'en donnons qu'une seule application. Soit  $P(\mathbf{r})$  un point quelconque de la surface sphérique; soient

$$A_i \equiv \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad A'_i \equiv \mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}' \\ a_i \equiv V_{\mathbf{bc}}, V_{\mathbf{ca}}, V_{\mathbf{ab}} \quad a'_i \equiv V_{\mathbf{b}'\mathbf{c}'}, V_{\mathbf{c}'\mathbf{a}'}, V_{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}$$

les sommets et côtés de deux triangles sphériques. Les droites sphériques qui relient le point  $P$  aux sommets du second (premier) triangle, coupent les côtés du premier (second) triangle en

$$Q_i \equiv VV_{\mathbf{ra'}} V_{\mathbf{bc}} \quad Q'_i \equiv VV_{\mathbf{ra}} V_{\mathbf{b}'\mathbf{c}'}$$

etc., et l'identité nous apprend: lorsque les droites  $(A_i, Q_i)$  sont concourantes, les droites  $(A'_i, Q'_i)$  le sont également.

On arrive à un autre théorème en considérant  $\mathbf{r}$  comme le vecteur d'une droite.

## VII

30. — Nous revenons à l'identité vectorielle du paragraphe 22 :

$$[V_{\mathbf{aa'}} V_{\mathbf{bb'}} V_{\mathbf{cc'}}] + [V_{\mathbf{bc'}} V_{\mathbf{ca'}} V_{\mathbf{ab'}}] + [V_{\mathbf{cb'}} V_{\mathbf{ac'}} V_{\mathbf{ba'}}] \equiv 0$$

qui peut nous fournir une démonstration très simple du théorème suivant :

Soient  $A_1, A_2, A_3$  les sommets d'un triangle sphérique,  $P$  un point quelconque de la surface sphérique,  $p_1, p_2, p_3$  les normales abaissées de ce point sur les côtés du triangle et coupant ces côtés dans les neuf points

$$P_{11}, P_{12}, P_{13}; \quad P_{21}, P_{22}, P_{23}; \quad P_{31}, P_{32}, P_{33};$$