Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1918)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES IDENTITÉS VECTORIELLES ET LEUR INTERPRÉTATION DANS LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ET PLANE

Autor: Daniëls, M.-Fr.

Kapitel: V

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18026

Lorsque sont concourantes les normales abaissées de A_1, A_2, A_3 sur les côtés a'_1, a'_2, a'_3 et sur les côtés a'_1, a'_3, a'_2, il en est de même des normales abaissées de A'_1, A'_2, A'_3 sur les côtés a_1, a_2, a_3 et a_1, a_3, a_2, en d'autres mots :

Lorsque les deux triangles sphériques A_i *et* A'_i *sont di-orthologiques en* A_1, *ils le sont encore en* A'_1.

V

26. — Nous pouvons encore dans l'expression fondamentale

$$[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\lambda_1\mathfrak{b} + \mu_1\mathfrak{c} \ldots] \pm [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\lambda'_1\mathfrak{b}' + \mu'_1\mathfrak{c}' \ldots]$$

remplacer les vecteurs arbitraires $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$, ... par les vecteurs également arbitraires $V\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, $V\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, ... et ensuite, pour satisfaire à la condition imposée aux λ_i, μ_i ..., prendre

$$\lambda_1 = \mathfrak{a}'.\mathfrak{b} \qquad \lambda_2 = \mathfrak{b}'\,\mathfrak{c} \qquad \lambda_3 = \mathfrak{c}'.\mathfrak{a}$$
$$\mu_1 = \mathfrak{a}'.\mathfrak{c} \qquad \mu_2 = \mathfrak{b}'.\mathfrak{a} \qquad \mu_3 = \mathfrak{c}'.\mathfrak{b}\ .$$

Dans ce cas nous avons évidemment

$$\lambda_1 V\mathfrak{c}\mathfrak{a} + \mu_1 V\mathfrak{a}\mathfrak{b} = V\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{a}',\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']^2[V\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{a}',\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad V\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{b}',\,\mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad V\mathfrak{c}\,.\,\mathfrak{c}',\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\\ &-[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2[V\mathfrak{a}'.\,\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad V\mathfrak{b}'.\,\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad V\mathfrak{c}'.\,\mathfrak{c}\,.\,\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \equiv 0\ . \qquad \text{(XI)}\end{aligned}$$

27. — Nous allons faire de cette identité *deux applications*. — 1. D'abord elle nous servira à démontrer *un théorème de M. R. Bricard*[1] :

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques.

Lorsque les points d'intersection Q_i *des droites* $(A_i, A'_i) \equiv p_i$ *avec les côtés* a_i *du premier triangle sont collinéaires, les droites de jonction* q_i *des points* $(a_i, a'_i) \equiv P_i$ *avec les sommets* A'_i *du second triangle sont concourantes et inversement.*

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 96.

En effet, si les vecteurs des sommets et côtés des deux triangles sont:

$$A_i \equiv V\mathfrak{bc} \ ; \quad V\mathfrak{ca} \ ; \quad V\mathfrak{ab} \qquad A_i' \equiv \mathfrak{a}' \ ; \quad \mathfrak{b}' \ ; \quad \mathfrak{c}'$$

$$a_i \equiv \mathfrak{a} \ ; \quad \mathfrak{b} \ ; \quad \mathfrak{c} \qquad a_i' \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \ ; \quad V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \ ; \quad V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$

nous trouvons pour les vecteurs de la droite p_1, du point Q_1, du point P_1 et de la droite q_1

$$p_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{bc} \qquad P_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

$$Q_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{a}'.\mathfrak{bc} \qquad q_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' .$$

Lorsque les points Q_i sont collinéaires, le premier terme de notre identité s'annule; le second terme disparaissant alors également, les droites q_i sont concourantes et inversement. q. e. d.

2. On peut tirer de notre identité encore la généralisation pour la sphère d'un *théorème* dû à M. *Constantinescu*[1]

Soient A_i et A_i' deux triangles sphériques. *Lorsque les normales* $\mathrm{q_i}$ *abaissées des* $\mathrm{A_i}$ *sur les côtés* $\mathrm{a_i'}$ *du second triangle coupent les côtés* $\mathrm{a_i}$ *du premier triangle en trois points collinéaires* $\mathrm{Q_i}$, *les normales* $\mathrm{q_i'}$ *abaissées des* $\mathrm{A_i'}$ *sur les* $\mathrm{a_i}$ *coupent les côtés* $\mathrm{a_i'}$ *du second triangle également en trois points collinéaires* $\mathrm{Q_i'}$.

En effet, lorsque les côtés et les sommets des deux triangles sphériques sont

$$A_i \equiv V\mathfrak{bc} \ ; \quad V\mathfrak{ca} \ ; \quad V\mathfrak{ab} \qquad A_i' \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \ ; \quad V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \ ; \quad V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$

$$a_i \equiv \mathfrak{a} \ ; \quad \mathfrak{b} \ ; \quad \mathfrak{c} \qquad a_i' \equiv \mathfrak{a}' \ ; \quad \mathfrak{b}' \ ; \quad \mathfrak{c}'$$

nous aurons successivement pour les normales q_1 et q_1' et pour leurs intersections Q_1 et Q_2 avec les côtés a_1 et a_1'

$$q_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{bc} \qquad q_1' \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

$$Q_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{a}'.\mathfrak{bc} \qquad Q_1' \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' .$$

Lorsque les points Q_i sont collinéaires, le premier terme de l'identité s'annule, ce qui entraîne la disparition du se-

[1] *Mathesis,* 1913, p. 69.

cond. Il s'ensuit que dans ce cas les Q'_i aussi sont collinéaires. q. e. d.

VI

28. — Si l'on pose dans l'expression fondamentale du par. 24 pour satisfaire à la condition imposée aux λ_i, μ_i ...

$$\lambda_1 = [\mathfrak{c}\mathfrak{a}'\mathfrak{x}] \qquad \lambda_2 = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}'\mathfrak{x}] \qquad \lambda_3 = [\mathfrak{b}\mathfrak{c}'\mathfrak{x}]$$
$$\mu_1 = [\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{x}] \qquad \mu_2 = [\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{x}] \qquad \mu_3 = [\mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{x}]$$

on trouve évidemment

$$\lambda_1 \mathfrak{b} + \mu_1 \mathfrak{c} = \mathrm{V}\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,\mathrm{V}\mathfrak{x}\mathfrak{a}'$$

etc., mais si comme au par. 26 on remplace les vecteurs arbitraires $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, ... par $\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathrm{V}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, ... , cette dernière expression devient, abstraction faite d'un facteur scalaire, facile à déterminer

$$\mathrm{V}\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

de sorte qu'on aboutit à l'identité entre *sept* vecteurs quelconques :

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\mathrm{V}\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad \mathrm{V}\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad \mathrm{V}\mathfrak{c}\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{a}'\mathfrak{b}']\\ &-[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\mathrm{V}\mathfrak{a}'\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad \mathrm{V}\mathfrak{b}'\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad \mathrm{V}\mathfrak{c}'\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}] \equiv 0\end{aligned} \qquad \text{(XII)}$$

Cette identité nous servira d'abord à démontrer pour la sphère *un théorème de Möbius*[1] *:*

Soient A_i *et* A'_i *deux triangles sphériques et* l *une droite sphérique quelconque.*

Lorsque les droites p_i *qui relient les points* $P_i \equiv (l, a_i)$ *aux sommets* A'_i *du second triangle sont concourantes, il en est de même des droites* p'_i *qui relient les points* $P'_i \equiv (l, a'_i)$ *aux sommets* A_i *du premier triangle.*

Car, si le vecteur de la *droite* sphérique l est $\mathfrak{x}$ et si les vecteurs des sommets A_i et A'_i sont $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ nous aurons successivement pour les points P_i, P'_i et les droites p_i, p'_i :

$$P_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad P'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$
$$p_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}'\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad p'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\,.$$

---

[1] *Crelle's Journal,* Bd. 3, 1828. — Werke I, S. 444.