

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES IDENTITÉS VECTORIELLES ET LEUR INTERPRÉTATION DANS LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ET PLANE
Autor: Daniëls, M.-Fr.
Kapitel: V
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18026>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Lorsque sont concourantes les normales abaissées de A_1, A_2, A_3 sur les côtés a'_1, a'_2, a'_3 et sur les côtés a'_1, a'_3, a'_2 , il en est de même des normales abaissées de A'_1, A'_2, A'_3 sur les côtés a_1, a_2, a_3 et a_1, a_3, a_2 , en d'autres mots :

Lorsque les deux triangles sphériques A_i et A'_i sont diorthologiques en A_1 , ils le sont encore en A'_1 .

V

26. — Nous pouvons encore dans l'expression fondamentale

$$[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'][\lambda_1\mathbf{b} + \mu_1\mathbf{c} \dots] \pm [\mathbf{abc}][\lambda'_1\mathbf{b}' + \mu'_1\mathbf{c}' \dots]$$

remplacer les vecteurs arbitraires $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \dots$ par les vecteurs également arbitraires $V\mathbf{bc}, V\mathbf{b}'\mathbf{c}', V\mathbf{ca} \dots$ et ensuite, pour satisfaire à la condition imposée aux $\lambda_i, \mu_i \dots$, prendre

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} & \lambda_2 &= \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} & \lambda_3 &= \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} \\ \mu_1 &= \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} & \mu_2 &= \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} & \mu_3 &= \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

Dans ce cas nous avons évidemment

$$\lambda_1 V\mathbf{ca} + \mu_1 V\mathbf{ab} = V\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}', \mathbf{bc}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned} & [\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}']^2 [V\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}', \mathbf{bc} \quad V\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}', \mathbf{ca} \quad V\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}', \mathbf{ab}] \\ & - [\mathbf{abc}]^2 [V\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \quad V\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}, \mathbf{c}'\mathbf{a}' \quad V\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}, \mathbf{a}'\mathbf{b}'] \equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{XI})$$

27. — Nous allons faire de cette identité *deux applications*.
— 1. D'abord elle nous servira à démontrer *un théorème de M. R. Bricard*¹:

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques.

Lorsque les points d'intersection Q_i des droites $(A_i, A'_i) \equiv P_i$ avec les côtés a_i du premier triangle sont collinéaires, les droites de jonction q_i des points $(a_i, a'_i) \equiv P_i$ avec les sommets A'_i du second triangle sont concourantes et inversement.

¹ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 96.

En effet, si les vecteurs des sommets et côtés des deux triangles sont :

$$\begin{array}{ll} A_i \equiv Vbc ; Vca ; Vab & A'_i \equiv a' ; b' ; c' \\ a_i \equiv a ; b ; c & a'_i \equiv Vb'c' ; Vc'a' ; Va'b' \end{array}$$

nous trouvons pour les vecteurs de la droite p_1 , du point Q_1 , du point P_1 et de la droite q_1

$$\begin{array}{ll} p_1 \equiv Va', bc & P_1 \equiv Va, b'c' \\ Q_1 \equiv Va, a', bc & q_1 \equiv Va', a, b'c' \end{array}$$

Lorsque les points Q_i sont collinéaires, le premier terme de notre identité s'annule; le second terme disparaissant alors également, les droites q_i sont concourantes et inversement. q. e. d.

2. On peut tirer de notre identité encore la généralisation pour la sphère d'un *théorème* dû à M. *Constantinescu*¹

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques. Lorsque les normales q_i abaissées des A_i sur les côtés a'_i du second triangle coupent les côtés a_i du premier triangle en trois points collinéaires Q_i , les normales q'_i abaissées des A'_i sur les a_i coupent les côtés a'_i du second triangle également en trois points collinéaires Q'_i .

En effet, lorsque les côtés et les sommets des deux triangles sphériques sont

$$\begin{array}{ll} A_i \equiv Vbc ; Vca ; Vab & A'_i \equiv Vb'c' ; Vc'a' ; Va'b' \\ a_i \equiv a ; b ; c & a'_i \equiv a' ; b' ; c' \end{array}$$

nous aurons successivement pour les normales q_1 et q'_1 et pour leurs intersections Q_1 et Q'_1 avec les côtés a_1 et a'_1

$$\begin{array}{ll} q_1 \equiv Va', bc & q'_1 \equiv Va, b'c' \\ Q_1 \equiv Va, a', bc & Q'_1 \equiv Va', a, b'c' \end{array}$$

Lorsque les points Q_i sont collinéaires, le premier terme de l'identité s'annule, ce qui entraîne la disparition du se-

¹ *Mathesis*, 1913, p. 69.

cond. Il s'ensuit que dans ce cas les Q'_i aussi sont colli-
néaires. q. e. d.

VI

28. — Si l'on pose dans l'expression fondamentale du par.
24 pour satisfaire à la condition imposée aux $\lambda_i, \mu_i \dots$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= [\mathbf{ca}'\mathbf{r}] & \lambda_2 &= [\mathbf{ab}'\mathbf{r}] & \lambda_3 &= [\mathbf{bc}'\mathbf{r}] \\ \mu_1 &= [\mathbf{a}'\mathbf{br}] & \mu_2 &= [\mathbf{b}'\mathbf{cr}] & \mu_3 &= [\mathbf{c}'\mathbf{ar}] \end{aligned}$$

on trouve évidemment

$$\lambda_1 \mathbf{b} + \mu_1 \mathbf{c} = \mathbf{V}\mathbf{V}\mathbf{bc} \mathbf{V}\mathbf{ra}'$$

etc., mais si comme au par. 26 on remplace les vecteurs
arbitraires $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \dots$ par $\mathbf{V}\mathbf{bc}, \mathbf{V}\mathbf{b}'\mathbf{c}', \dots$, cette dernière expres-
sion devient, abstraction faite d'un facteur scalaire, facile à
déterminer

$$\mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}'$$

de sorte qu'on aboutit à l'identité entre *sept* vecteurs quel-
conques :

$$\begin{aligned} & [\mathbf{abc}][\mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \quad \mathbf{V}\mathbf{b}, \mathbf{r}, \mathbf{c}'\mathbf{a}' \quad \mathbf{V}\mathbf{c}, \mathbf{r}, \mathbf{a}'\mathbf{b}'] \\ - & [\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'][\mathbf{V}\mathbf{a}', \mathbf{r}, \mathbf{bc} \quad \mathbf{V}\mathbf{b}', \mathbf{r}, \mathbf{ca} \quad \mathbf{V}\mathbf{c}', \mathbf{r}, \mathbf{ab}] \equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{XII})$$

Cette identité nous servira d'abord à démontrer pour la
sphère *un théorème de Möbius*¹ :

*Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques et l une droite
sphérique quelconque.*

*Lorsque les droites p_i qui relient les points $P_i \equiv (l, a_i)$ aux
sommets A'_i du second triangle sont concourantes, il en est de
même des droites p'_i qui relient les points $P'_i \equiv (l, a'_i)$ aux
sommets A_i du premier triangle.*

Car, si le vecteur de la droite sphérique l est \mathbf{r} et si les
vecteurs des sommets A_i et A'_i sont $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ et $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ nous
aurons successivement pour les points P_i, P'_i et les droites
 p_i, p'_i :

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{r}, \mathbf{bc} & P'_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \\ p_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{a}', \mathbf{r}, \mathbf{bc} & p'_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \end{aligned}$$

¹ *Crelle's Journal*, Bd. 3, 1828. — Werke I, S. 444.