

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1918)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR CERTAINES IDENTITÉS VECTORIELLES ET LEUR INTERPRÉTATION DANS LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ET PLANE  
**Autor:** Daniëls, M.-Fr.  
**Kapitel:** V  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18026>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.09.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Lorsque sont concourantes les normales abaissées de  $A_1, A_2, A_3$  sur les côtés  $a'_1, a'_2, a'_3$  et sur les côtés  $a'_1, a'_3, a'_2$ , il en est de même des normales abaissées de  $A'_1, A'_2, A'_3$  sur les côtés  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_1, a_3, a_2$ , en d'autres mots :

*Lorsque les deux triangles sphériques  $A_i$  et  $A'_i$  sont diorthologiques en  $A_1$ , ils le sont encore en  $A'_1$ .*

## V

26. — Nous pouvons encore dans l'expression fondamentale

$$[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'][\lambda_1\mathbf{b} + \mu_1\mathbf{c} \dots] \pm [\mathbf{abc}][\lambda'_1\mathbf{b}' + \mu'_1\mathbf{c}' \dots]$$

remplacer les vecteurs arbitraires  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \dots$  par les vecteurs également arbitraires  $V\mathbf{bc}, V\mathbf{b}'\mathbf{c}', V\mathbf{ca}, \dots$  et ensuite, pour satisfaire à la condition imposée aux  $\lambda_i, \mu_i \dots$ , prendre

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} & \lambda_2 &= \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} & \lambda_3 &= \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} \\ \mu_1 &= \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} & \mu_2 &= \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} & \mu_3 &= \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

Dans ce cas nous avons évidemment

$$\lambda_1 V\mathbf{ca} + \mu_1 V\mathbf{ab} = V\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}', \mathbf{bc}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned} & [\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}']^2 [V\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}', \mathbf{bc} \quad V\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}', \mathbf{ca} \quad V\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}', \mathbf{ab}] \\ & - [\mathbf{abc}]^2 [V\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \quad V\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}, \mathbf{c}'\mathbf{a}' \quad V\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}, \mathbf{a}'\mathbf{b}'] \equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{XI})$$

27. — Nous allons faire de cette identité *deux applications*.  
— 1. D'abord elle nous servira à démontrer *un théorème de M. R. Bricard*<sup>1</sup>:

Soient  $A_i$  et  $A'_i$  deux triangles sphériques.

*Lorsque les points d'intersection  $Q_i$  des droites  $(A_i, A'_i) \equiv P_i$  avec les côtés  $a_i$  du premier triangle sont collinéaires, les droites de jonction  $q_i$  des points  $(a_i, a'_i) \equiv P_i$  avec les sommets  $A'_i$  du second triangle sont concourantes et inversement.*

<sup>1</sup> *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 96.

En effet, si les vecteurs des sommets et côtés des deux triangles sont :

$$\begin{array}{ll} A_i \equiv Vbc ; Vca ; Vab & A'_i \equiv a' ; b' ; c' \\ a_i \equiv a ; b ; c & a'_i \equiv Vb'c' ; Vc'a' ; Va'b' \end{array}$$

nous trouvons pour les vecteurs de la droite  $p_1$ , du point  $Q_1$ , du point  $P_1$  et de la droite  $q_1$

$$\begin{array}{ll} p_1 \equiv Va', bc & P_1 \equiv Va, b'c' \\ Q_1 \equiv Va, a', bc & q_1 \equiv Va', a, b'c' \end{array}$$

Lorsque les points  $Q_i$  sont collinéaires, le premier terme de notre identité s'annule; le second terme disparaissant alors également, les droites  $q_i$  sont concourantes et inversement. q. e. d.

2. On peut tirer de notre identité encore la généralisation pour la sphère d'un *théorème* dû à M. *Constantinescu*<sup>1</sup>

Soient  $A_i$  et  $A'_i$  deux triangles sphériques. Lorsque les normales  $q_i$  abaissées des  $A_i$  sur les côtés  $a'_i$  du second triangle coupent les côtés  $a_i$  du premier triangle en trois points collinéaires  $Q_i$ , les normales  $q'_i$  abaissées des  $A'_i$  sur les  $a_i$  coupent les côtés  $a'_i$  du second triangle également en trois points collinéaires  $Q'_i$ .

En effet, lorsque les côtés et les sommets des deux triangles sphériques sont

$$\begin{array}{ll} A_i \equiv Vbc ; Vca ; Vab & A'_i \equiv Vb'c' ; Vc'a' ; Va'b' \\ a_i \equiv a ; b ; c & a'_i \equiv a' ; b' ; c' \end{array}$$

nous aurons successivement pour les normales  $q_1$  et  $q'_1$  et pour leurs intersections  $Q_1$  et  $Q'_1$  avec les côtés  $a_1$  et  $a'_1$

$$\begin{array}{ll} q_1 \equiv Va', bc & q'_1 \equiv Va, b'c' \\ Q_1 \equiv Va, a', bc & Q'_1 \equiv Va', a, b'c' \end{array}$$

Lorsque les points  $Q_i$  sont collinéaires, le premier terme de l'identité s'annule, ce qui entraîne la disparition du se-

<sup>1</sup> *Mathesis*, 1913, p. 69.

cond. Il s'ensuit que dans ce cas les  $Q'_i$  aussi sont colli-néaires. q. e. d.

## VI

28. — Si l'on pose dans l'expression fondamentale du par. 24 pour satisfaire à la condition imposée aux  $\lambda_i, \mu_i \dots$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= [\mathbf{ca}'\mathbf{r}] & \lambda_2 &= [\mathbf{ab}'\mathbf{r}] & \lambda_3 &= [\mathbf{bc}'\mathbf{r}] \\ \mu_1 &= [\mathbf{a}'\mathbf{br}] & \mu_2 &= [\mathbf{b}'\mathbf{cr}] & \mu_3 &= [\mathbf{c}'\mathbf{ar}] \end{aligned}$$

on trouve évidemment

$$\lambda_1 \mathbf{b} + \mu_1 \mathbf{c} = \mathbf{V}\mathbf{V}\mathbf{bc} \mathbf{V}\mathbf{ra}'$$

etc., mais si comme au par. 26 on remplace les vecteurs arbitraires  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \dots$  par  $\mathbf{V}\mathbf{bc}, \mathbf{V}\mathbf{b}'\mathbf{c}', \dots$ , cette dernière expression devient, abstraction faite d'un facteur scalaire, facile à déterminer

$$\mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}'$$

de sorte qu'on aboutit à l'identité entre *sept* vecteurs quelconques :

$$\begin{aligned} & [\mathbf{abc}][\mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \quad \mathbf{V}\mathbf{b}, \mathbf{r}, \mathbf{c}'\mathbf{a}' \quad \mathbf{V}\mathbf{c}, \mathbf{r}, \mathbf{a}'\mathbf{b}'] \\ - & [\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'][\mathbf{V}\mathbf{a}', \mathbf{r}, \mathbf{bc} \quad \mathbf{V}\mathbf{b}', \mathbf{r}, \mathbf{ca} \quad \mathbf{V}\mathbf{c}', \mathbf{r}, \mathbf{ab}] \equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{XII})$$

Cette identité nous servira d'abord à démontrer pour la sphère *un théorème de Möbius*<sup>1</sup> :

*Soient  $A_i$  et  $A'_i$  deux triangles sphériques et  $l$  une droite sphérique quelconque.*

*Lorsque les droites  $p_i$  qui relient les points  $P_i \equiv (l, a_i)$  aux sommets  $A'_i$  du second triangle sont concourantes, il en est de même des droites  $p'_i$  qui relient les points  $P'_i \equiv (l, a'_i)$  aux sommets  $A_i$  du premier triangle.*

Car, si le vecteur de la droite sphérique  $l$  est  $\mathbf{r}$  et si les vecteurs des sommets  $A_i$  et  $A'_i$  sont  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  et  $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$  nous aurons successivement pour les points  $P_i, P'_i$  et les droites  $p_i, p'_i$  :

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{r}, \mathbf{bc} & P'_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \\ p_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{a}', \mathbf{r}, \mathbf{bc} & p'_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \end{aligned}$$

<sup>1</sup> *Crelle's Journal*, Bd. 3, 1828. — Werke I, S. 444.