Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1918)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES IDENTITÉS VECTORIELLES ET LEUR INTERPRÉTATION DANS LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ET PLANE

Autor: Daniëls, M.-Fr.

Kapitel: III

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18026

qu'on y remplace $\mathfrak{x}_0$ par $V\mathfrak{b}\mathfrak{l}$. En tenant compte de ce que

$$[\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4] = V\mathfrak{b}\mathfrak{l}\,.\,V\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4 = \mathfrak{b}\,.\,V\mathfrak{l}\,.\,\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4$$

nous trouvons en effet qu'elle prend la forme

$$[\mathfrak{b}\,.\,V\mathfrak{l},\, \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4][\mathfrak{b}\,.\,V\mathfrak{l},\, \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3] + [\mathfrak{b}\,.\,V\mathfrak{l},\, \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4][\mathfrak{b}\,.\,V\mathfrak{l},\, \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1]$$
$$+ [\mathfrak{b}\,.\,V\mathfrak{l},\, \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4][\mathfrak{b}\,.\,V\mathfrak{l},\, \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2] \equiv 0 \,.$$

Or, si $\mathfrak{l}$ est une droite sphérique quelconque, le point d'intersection de cette droite avec le côté $(\mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_k)$ du quadrangle complet des $\mathfrak{x}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, point que nous voulons appeler P_{ik}, sera $V\mathfrak{l},\, \mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_k$. L'identité nous apprend la propriété connue de l'involution des six points

$$P_{14}\,,\quad P_{23}\,;\qquad P_{24}\,,\quad P_{31}\,;\qquad P_{34}\,,\quad P_{12}$$

pourvu que $\mathfrak{b}$ soit toujours le vecteur symbolique du paragraphe 17 correspondant a certaine conique.

III

22. — Nous arrivons maintenant à une identité nouvelle, qui admet plusieurs interprétations et qui, peut-être plus que les précédentes, montre tout le profit qu'on peut tirer de ces relations vectorielles, non seulement pour démontrer facilement et pour relier entre eux des théorèmes assez différents connus, mais encore pour en trouver des nouveaux.

C'est l'identité

$$[V\mathfrak{a}\mathfrak{a}'V\mathfrak{b}\mathfrak{b}'V\mathfrak{c}\mathfrak{c}'] + [V\mathfrak{b}\mathfrak{c}'V\mathfrak{c}\mathfrak{a}'V\mathfrak{a}\mathfrak{b}'] + [V\mathfrak{c}\mathfrak{b}'V\mathfrak{a}\mathfrak{c}'V\mathfrak{b}\mathfrak{a}'] \equiv 0 \,. \qquad \text{(IX)}$$

La démonstration en est simple, quand on remarque que le second et le troisième terme se déduisent du premier par permutation circulaire positive des vecteurs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et par permutation circulaire négative des vecteurs $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$. Nous obtenons ainsi en développant les trois produits pseudoscalaires

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'][\mathfrak{b}'\mathfrak{b}\mathfrak{c}] - [\mathfrak{a}'\mathfrak{a}\mathfrak{c}][\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']$$
$$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'][\mathfrak{a}'\mathfrak{c}\mathfrak{a}] - [\mathfrak{c}'\mathfrak{b}\mathfrak{a}][\mathfrak{c}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}']$$
$$[\mathfrak{c}\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'][\mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{b}] - [\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{b}][\mathfrak{a}\mathfrak{c}'\mathfrak{a}']$$

dont la somme est identiquement nulle.

23. — *Applications*. — 1. Si les vecteurs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ déterminent les *sommets* A_i d'un premier, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ les *sommets* B_i d'un second triangle sphérique ou plan, les produits vectoriels du premier et du second terme désignent les trois droites $A_i B_i$ resp. $A_i B_{i+1}$, etc. L'identité tout entière nous apprend que *les triangles sont triplement perspectifs, lorsqu'ils sont doublement perspectifs,* autrement dit: lorsque les droites (A_i, B_i) et les droites $(A_i B_{i+1})$ sont concourantes, il en est de même des droites (A_i, B_{i-1}), car la disparition des deux premiers termes de l'identité entraîne celle du dernier.

2. Si les vecteurs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ déterminent les *sommets* A_i d'un premier, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ les *côtés* a'_i d'un second triangle sphérique ou plan, les produits vectoriels du premier terme désignent les normales abaissées des sommets A_i sur les côtés a'_i, etc., et la même identité nous apprend que *deux triangles sphériques ou plans sont triplement orthologiques lorsqu'ils sont doublement orthologiques,* autrement dit: lorsque les normales abaissées des sommets A_i sur les côtés a'_i et les normales abaissées des sommets A_i sur les côtés a'_{i+1} sont concourantes; il en est de même des normales abaissées des sommets A_i sur les côtés a'_{i-1}.

3. Supposons en troisième lieu que nous ayons deux triangles sphériques ou plans, dont les sommets sont A_i, A'_i et les côtés a_i, a'_i. Supposons en outre que les vecteurs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ déterminent les *sommets* du premier, $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ les « *milieux extérieurs* »[1] du second triangle. Dans ce cas les produits externes du premier terme de notre identité sont trois droites par les A_i et « parallèles » aux a'_i, de même ceux du second terme désignent trois droites passant par les A_i et « parallèles » aux a'_{i+1}, ceux du troisième terme enfin correspondent aux droites qui, passant par les A_i sont « parallèles » aux a'_{i-1}.

On dit que deux triangles sont simplement métaparallèles, lorsque les trois premières droites sont concourantes, doublement lorsque les trois droites suivantes sont également

---

[1] Nous entendons par « milieu extérieur » du côté $(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3)$ du triangle sphérique le point $\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_3$ qui est à une distance $\pi/2$ du « milieu intérieur » $\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3$.

concourantes, triplement enfin lorsque les trois dernières le sont aussi. Or, notre identité nous apprend : *lorsque deux triangles sphériques ou plans sont doublement métaparallèles, ils sont aussi triplement métaparallèles* [1].

4. Une application toute différente de notre identité nous est fournie par la théorie des coniques. Soient

$$\mathfrak{a} \quad \mathfrak{c}' \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{a}' \quad \mathfrak{c} \quad \mathfrak{b}' \quad (\mathfrak{a})$$

$$\mathfrak{r}_2 \quad \mathfrak{r}'_1 \quad \mathfrak{r}_3 \quad \mathfrak{r}'_2 \quad \mathfrak{r}_1 \quad \mathfrak{r}'_3 \quad (\mathfrak{r}_2)$$

les vecteurs des *côtés* et des *sommets* d'un hexagone inscrit dans une conique sphérique ou plane. Dans ce cas les points d'intersection

$$V\mathfrak{a}\mathfrak{a}' \ , \qquad V\mathfrak{b}\mathfrak{b}' \ , \qquad V\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$$

sont collinéaires d'après le théorème de Pascal, et notre identité (IX) nous donne

$$[V\mathfrak{b}\mathfrak{c}' \, V\mathfrak{c}\mathfrak{a}' \, V\mathfrak{a}\mathfrak{b}'] + [V\mathfrak{c}\mathfrak{b}' \, V\mathfrak{a}\mathfrak{c}' \, V\mathfrak{b}\mathfrak{a}'] = 0 \ .$$

Or, si nous remarquons 1° que chaque terme de cette équation contient les six vecteurs une seule fois, 2° que $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}'$, etc., sont, abstraction faite de certains coefficients scalaires,

$$V\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3 \ , \quad V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_1 \ , \quad V\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1 \ , \quad V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_2 \ , \quad V\mathfrak{r}'_3\mathfrak{r}_2 \ , \quad V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_3 \ ,$$

3° que par conséquent les six produits vectoriels qui se trouvent dans la dernière équation peuvent être remplacés par

$$[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]\mathfrak{r}'_1 \ , \qquad [\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_3]\mathfrak{r}'_2 \ , \qquad [\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3]\mathfrak{r}'_3$$

$$-\,[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3]\mathfrak{r}_1 \ , \qquad -\,[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3]\mathfrak{r}_2 \ , \qquad -\,[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_3]\mathfrak{r}_3$$

nous voyons sans peine que la dernière équation donne pour la sphère comme pour le plan *le théorème de Pappus*, d'après lequel pour six points $\mathfrak{r}_i$ et $\mathfrak{r}'_i$ d'une conique

$$[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3] = [\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3] \ .$$

Il est évident que nous obtenons un autre hexagone ins-

[1] Pour deux triangles plans voir J. NEUBERG, *Mathesis*, 1883, p. 216, 1886, p. 134, 1914, p. 92.

crit dans la même conique en soumettant les $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ seuls à une permutation circulaire ; dans ce cas nous trouvons :

$$[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3] = [\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]\,.$$

La division des deux dernières équations conduit pour six points d'une conique sphérique à la relation

$$\frac{[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3]}{[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_3]} = \frac{[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3]}{[\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1]}$$

qui n'est autre chose que *le théorème* bien connu *de Carnot.*

Nous interrompons ici les applications de l'identité pour y revenir au paragraphe 30.

IV

24. — Les identités entre *six* vecteurs des paragraphes précédents ne sont pas les seules possibles. Il y en a d'autres ; ainsi on démontre sans peine que

$$\begin{gathered}[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\lambda_1\mathfrak{b} + \mu_1\mathfrak{c} \quad \lambda_2\mathfrak{c} + \mu_2\mathfrak{a} \quad \lambda_3\mathfrak{a} + \mu_3\mathfrak{b}] \\ \pm [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,][\lambda'_1\mathfrak{b}' + \mu'_1\mathfrak{c}' \quad \lambda'_2\mathfrak{c}' + \mu'_2\mathfrak{a}' \quad \lambda'_3\mathfrak{a}' + \mu'_3\mathfrak{b}']\end{gathered}$$

est identiquement nul, pourvu que l'expression scalaire

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \mu_1\mu_2\mu_3$$

ne change pas en valeur absolue, lorsque les $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont remplacés par les $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ et inversement.

25. — On satisfait déjà à la condition imposée aux λ_i et μ_i en prenant

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = \mathfrak{c}.\mathfrak{a}' & \lambda_2 = \mathfrak{a}.\mathfrak{b}' & \lambda_3 = \mathfrak{b}.\mathfrak{c}' \\ \mu_1 = -\,\mathfrak{b}.\mathfrak{a}' & \mu_2 = -\,\mathfrak{c}.\mathfrak{b}' & \mu_3 = -\,\mathfrak{a}.\mathfrak{c}' \end{array}$$

et c'est ainsi qu'on arrive à l'identité

$$[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][V\mathfrak{a}',\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ \ V\mathfrak{b}',\mathfrak{c}\mathfrak{a}\ \ V\mathfrak{c}',\mathfrak{a}\mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][V\mathfrak{a},\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\ \ V\mathfrak{b},\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'\ \ V\mathfrak{c},\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \equiv 0 \qquad \text{(X)}$$

Applications. — 1. Supposons que les sommets et les côtés de deux triangles sphériques ayent les vecteurs

$$\begin{array}{ll} A_i \equiv \mathfrak{a}\,;\ \mathfrak{b}\,;\ \mathfrak{c} & A'_i \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\,;\ V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'\,;\ V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' \\ a_i \equiv V\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,;\ V\mathfrak{c}\mathfrak{a}\,;\ V\mathfrak{a}\mathfrak{b} & a'_i \equiv \mathfrak{a}'\,;\ \mathfrak{b}'\,;\ \mathfrak{c}'\,. \end{array}$$