

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1918)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR CERTAINES IDENTITÉS VECTORIELLES ET LEUR INTERPRÉTATION DANS LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ET PLANE  
**Autor:** Daniëls, M.-Fr.  
**Kapitel:** I  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18026>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

est le produit vectoriel ou externe  $V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$ , vecteur dont la grandeur est  $\sin \alpha$ , lorsque  $\alpha$  est la distance sphérique minima des points en question.

d) que le vecteur du point d'intersection des droites  $\mathfrak{l}$  et  $\mathfrak{l}_1$  est de même  $V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}$ , la grandeur de ce vecteur étant  $\sin \alpha$  lorsque  $\alpha$  est l'angle des deux droites.

e) que le vecteur  $\alpha\mathbf{r} - \alpha_1\mathbf{r}_1$  appartient à un point P situé sur la droite déterminée par  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}_1$  et tel que  $\sin(\text{PR}) : \sin(\text{PR}_1) \equiv (\text{RR}_1\text{P}) = \alpha_1 : \alpha$ .

f) que le vecteur  $\beta\mathfrak{l} - \beta_1\mathfrak{l}_1$  appartient à une droite  $p$  passant par l'intersection des droites  $l(\mathfrak{l})$  et  $l_1(\mathfrak{l}_1)$  et telle que  $\sin(pl) : \sin(pl_1) \equiv (ll_1p) = \beta_1 : \beta$ .

g) que trois points sont collinéaires et que trois droites sont concourantes lorsque les trois vecteurs correspondants multipliés par certains facteurs donnent une somme nulle.

h) qu'une droite de vecteur  $\mathfrak{l}$  ne passe par un point de vecteur  $\mathbf{r}$  que lorsque le produit scalaire ou interne de leurs vecteurs est nul.

i) que la droite dont le vecteur est  $V\mathbf{r}\mathfrak{l}$  passe par le point  $\mathbf{r}$  tout en étant normale à la droite dont le vecteur est  $\mathfrak{l}$ .

## I

2. — Considérons maintenant les identités vectorielles :

$$\begin{aligned} (\beta_2\mathfrak{l}_2 - \beta_3\mathfrak{l}_3) + (\beta_3\mathfrak{l}_3 - \beta_1\mathfrak{l}_1) + (\beta_1\mathfrak{l}_1 - \beta_2\mathfrak{l}_2) &\equiv 0. \\ (\alpha_2\mathbf{r}_2 - \alpha_3\mathbf{r}_3) + (\alpha_3\mathbf{r}_3 - \alpha_1\mathbf{r}_1) + (\alpha_1\mathbf{r}_1 - \alpha_2\mathbf{r}_2) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Si les vecteurs des côtés et ceux des sommets opposés d'un triangle sphérique sont  $\mathfrak{l}_i$  et  $\mathbf{r}_i$ , la première nous apprend que trois transversales angulaires, pour lesquelles le produit des rapports est *un* sont concourantes (1, g). Il ressort de la seconde que trois points appartenant aux trois côtés, pour lesquels le produit des rapports est *un*, sont collinéaires.

D'après (1, d) le point d'intersection dans le premier cas est déterminé par le produit vectoriel

$$V(\beta_2\mathfrak{l}_2 - \beta_3\mathfrak{l}_3)(\beta_3\mathfrak{l}_3 - \beta_1\mathfrak{l}_1) \quad \text{ou} \quad \frac{\sin A_1}{\beta_1}\mathbf{r}_1 + \frac{\sin A_2}{\beta_2}\mathbf{r}_2 + \frac{\sin A_3}{\beta_3}\mathbf{r}_3$$

lorsque les angles extérieurs du triangle sphérique sont  $A_i$ . Les coordonnées barycentriques du point d'intersection sont par conséquent  $\sin A_i / \beta_i$ .

De même on trouve dans le second cas pour la droite des trois points le vecteur

$$V(\alpha_2 \mathbf{r}_2 - \alpha_3 \mathbf{r}_3)(\alpha_3 \mathbf{r}_3 - \alpha_1 \mathbf{r}_1) \quad \text{ou} \quad \frac{\sin a_1}{\alpha_1} \mathbf{f}_1 + \frac{\sin a_2}{\alpha_2} \mathbf{f}_2 + \frac{\sin a_3}{\alpha_3} \mathbf{f}_3$$

lorsque les  $a_i$  sont les côtés du triangle sphérique. Les coordonnées barycentriques de cette droite sont  $1/\alpha_i$ . Dans le cas-limite du triangle plan, les  $\sin A_i$  et  $\sin a_i$  peuvent être remplacés par les côtés  $a_i$  eux-mêmes.

3. — a) La première médiane, dont le vecteur a la forme  $\beta_2 \mathbf{f}_2 - \beta_3 \mathbf{f}_3$  passe par le milieu du côté opposé  $\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$ . Le produit interne de ces deux vecteurs étant par conséquent  $(1, h)$  nul, il s'ensuit :

$$\beta_2 \sin h_2 - \beta_3 \sin h_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \beta_2 \sin A_3 - \beta_3 \sin A_2 = 0$$

lorsque les  $h_i$  sont les hauteurs du triangle sphérique. Les trois médianes

$$\sin A_2 \mathbf{f}_2 - \sin A_3 \mathbf{f}_3, \quad \sin A_3 \mathbf{f}_3 - \sin A_1 \mathbf{f}_1, \quad \sin A_1 \mathbf{f}_1 - \sin A_2 \mathbf{f}_2$$

sont donc concourantes; de même les trois symédianes

$$\frac{\mathbf{f}_2}{\sin A_2} - \frac{\mathbf{f}_3}{\sin A_3}, \quad \frac{\mathbf{f}_3}{\sin A_3} - \frac{\mathbf{f}_1}{\sin A_1}, \quad \frac{\mathbf{f}_1}{\sin A_1} - \frac{\mathbf{f}_2}{\sin A_2}.$$

Les premières passent d'après le paragraphe précédent par le point, dont les coordonnées barycentriques sont  $(1, 1, 1)$ ; les secondes passent par le point de Lemoine ou Græbe  $(\sin^2 a_1, \sin^2 a_2, \sin^2 a_3)$  qui, dans le cas-limite du triangle plan, devient  $(a_1^2, a_2^2, a_3^2)$ .

b) La droite dont le vecteur  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$  appartient au premier côté du triangle est par là même normale à ce côté; elle passe par le milieu de ce côté  $\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$ , vu que le produit scalaire des deux vecteurs en question est nul  $(1, h)$ . Le point d'intersection des normales concourantes

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

est déterminé (1, *d*) par le produit externe de deux de ces vecteurs

$$V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 + V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 .$$

C'est le centre du cercle circonscrit.

4. — Posons maintenant dans notre identité du paragraphe 2

$$\alpha_1 \equiv \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_3 = \cos a_1 \quad \alpha_2 \equiv \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1 = \cos a_2 \quad \alpha_3 \equiv \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \cos a_3 .$$

Elle prendra alors la forme<sup>1</sup>

$$V\mathbf{r}_1 V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + V\mathbf{r}_2 V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 + V\mathbf{r}_3 V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \equiv 0 \quad (\text{II})$$

ou encore

$$V\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + V\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 + V\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \equiv 0$$

lorsque pour éviter une accumulation de V, on n'écrit que le dernier en remplaçant les autres par des virgules. Or,  $V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$  est le premier côté et  $V\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$  d'après (1, *i*) la normale abaissée sur cette droite du sommet opposé  $\mathbf{r}_1$ ; l'identité nous apprend donc que dans un triangle sphérique les trois hauteurs sont concourantes. L'orthocentre  $x_i$  étant sur la première hauteur, nous avons, en écrivant par abréviation  $s_i$  et  $S_i$ ,  $c_i$  et  $C_i$  pour  $\sin a_i$ ,  $\sin A_i$ ,  $\cos a_i$  et  $\cos A_i$  d'après (1, *h*)

$$\begin{aligned} (x_1\mathbf{r}_1 + x_2\mathbf{r}_2 + x_3\mathbf{r}_3) \cdot V\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 &\equiv x_3 V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \cdot V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 - x_2 V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \cdot V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \\ &= x_3 s_1 s_2 C_3 - x_2 s_1 s_3 C_2 = 0 \end{aligned}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = \text{tang } A_1 : \text{tang } A_2 : \text{tang } A_3 .$$

5. — En multipliant l'identité du paragraphe précédent scalairement par le vecteur  $\mathbf{r}_4$ , nous obtenons la nouvelle identité :

$$V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_4 \cdot V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_4 \cdot V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 + V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_4 \cdot V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \equiv 0 . \quad (\text{III})$$

Elle nous apprend d'abord : si dans un quadrangle complet  $(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3\mathbf{r}_4)$  sphérique ou plan non seulement les côtés  $(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)$  et  $(\mathbf{r}_3\mathbf{r}_4)$  sont *perpendiculaires ou conjugués par rapport à une conique sphérique ou plane*, mais encore les côtés  $(\mathbf{r}_2\mathbf{r}_4)$

<sup>1</sup> On a en effet  $\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \equiv V\mathbf{r}_1 V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$ .

et  $(\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1)$ , il en sera de même des côtés  $(\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)$  et  $(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)$ , vu que la disparition des deux premiers produits scalaires entraîne celle du dernier.

On peut évidemment écrire notre identité :

$$V\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_4 \cdot V\mathbf{l}_2 \mathbf{l}_3 + V\mathbf{l}_2 \mathbf{l}_4 \cdot V\mathbf{l}_3 \mathbf{l}_1 + V\mathbf{l}_3 \mathbf{l}_4 \cdot V\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2 \equiv 0$$

et considérer les vecteurs comme appartenant aux quatre côtés d'un quadrilatère sphérique complet. Dans ce cas les six produits vectoriels déterminent les sommets  $(1, d)$ , et l'identité nous apprend : si les distances des sommets  $V\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_4$  et  $V\mathbf{l}_2 \mathbf{l}_3$  et des sommets  $V\mathbf{l}_2 \mathbf{l}_4$  et  $V\mathbf{l}_3 \mathbf{l}_1$  sont des quadrants, ou bien si ces sommets sont conjugués deux à deux par rapport à une conique il en est de même pour les sommets  $V\mathbf{l}_3 \mathbf{l}_4$  et  $V\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2$ .

6. — Reprenons encore l'identité I et posons-y :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= V\mathbf{r}_2 \mathbf{l} \cdot V\mathbf{r}_3 \mathbf{l} \equiv \mathbf{r}_2 \cdot V\mathbf{l}, \mathbf{r}_3 \equiv \mathbf{r}_3 \cdot V\mathbf{l}, \mathbf{r}_2 \\ \alpha_2 &= V\mathbf{r}_3 \mathbf{l} \cdot V\mathbf{r}_1 \mathbf{l} \equiv \mathbf{r}_3 \cdot V\mathbf{l}, \mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{r}_1 \cdot V\mathbf{l}, \mathbf{r}_3 \\ \alpha_3 &= V\mathbf{r}_1 \mathbf{l} \cdot V\mathbf{r}_2 \mathbf{l} \equiv \mathbf{r}_1 \cdot V\mathbf{l}, \mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}_2 \cdot V\mathbf{l}, \mathbf{r}_1 \end{aligned}$$

Nous rappelant que

$$\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$$

est le produit externe des vecteurs

$$\times \quad \text{et} \quad V\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3$$

nous voyons sans peine qu'un des trois termes de notre identité avec un changement de signe devient le produit externe des vecteurs :

$$V\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \quad \text{et} \quad V\mathbf{l}, \mathbf{r}_1$$

ou encore<sup>1</sup> de

$$\mathbf{l}_1 \quad \text{et} \quad V\mathbf{l}, \mathbf{l}, \mathbf{l}_2 \mathbf{l}_3 .$$

L'identité toute entière prend par conséquent la forme :

$$V\mathbf{l}_1, \mathbf{l}, \mathbf{l}, \mathbf{l}_2 \mathbf{l}_3 + V\mathbf{l}_2, \mathbf{l}, \mathbf{l}, \mathbf{l}_3 \mathbf{l}_1 + V\mathbf{l}_3, \mathbf{l}, \mathbf{l}, \mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2 \equiv 0 \quad \text{(IV)}$$

<sup>1</sup> Se rappeler que  $V\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 = \sin a_1 \mathbf{l}_1$  et  $V\mathbf{l}_2 \mathbf{l}_3 = \sin A_1 \mathbf{r}_1$ . On multiplie donc en réalité par le module du triangle sphérique des  $\mathbf{r}_i$ , c'est-à-dire par  $\sin A_i : \sin a_i$ .

L'interprétation géométrique de cette identité est bien simple. En effet, si les  $\mathfrak{f}_i$  sont les côtés d'un trilatère sphérique et si  $\mathfrak{f}$  est le vecteur d'une droite quelconque  $l$ , on a successivement pour le premier sommet  $A_1$ , pour la normale  $p_1$  abaissée sur la droite  $l$ , pour son intersection  $P_1$  avec  $l$ , et pour la normale  $q_1$  du point  $P_1$  sur le premier côté du triangle, en appliquant alternativement (1,  $d$ ) et (1,  $i$ )

$$A_1 \equiv \mathfrak{V}\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3, \quad p_1 \equiv \mathfrak{V}\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3, \quad P_1 \equiv \mathfrak{V}\mathfrak{f}, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3, \quad q_1 \equiv \mathfrak{V}\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3.$$

Nous obtenons deux droites analogues  $q_2, q_3$  en partant des deux autres sommets du trilatère. L'identité nous apprend que les trois droites sphériques  $q_i$  sont concourantes. Leur point commun est l'*orthopôle de la droite sphérique*<sup>1</sup>. D'après l'extension connue donnée au produit externe de deux vecteurs, l'identité IV peut encore s'interpréter de la manière suivante :

Si l'on mène par les sommets  $A_i$  des droites  $p_i$ , conjuguées à une droite quelconque  $l$  par rapport à une conique donnée, les points d'intersection étant  $P_i$ , les droites  $q_i$ , qui passant par les  $P_i$  sont conjuguées aux côtés  $a_i$  du triangle sphérique passent par un point.

7. — On trouve les coordonnées barycentriques  $x_i$  de l'orthopôle correspondant à la droite sphérique  $u_i$  en formant (1,  $d$ ) le produit externe de

$$q_1 \equiv \alpha_2 \mathfrak{r}_2 - \alpha_3 \mathfrak{r}_3 \quad \text{et} \quad q_2 \equiv \alpha_3 \mathfrak{r}_3 - \alpha_1 \mathfrak{r}_1$$

c'est-à-dire qu'on a d'une manière générale

$$x_1 \mathfrak{r}_1 + x_2 \mathfrak{r}_2 + x_3 \mathfrak{r}_3 = \alpha_2 \alpha_3 \mathfrak{V}\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 + \alpha_3 \alpha_1 \mathfrak{V}\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1 + \alpha_1 \alpha_2 \mathfrak{V}\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2$$

ce qui, multiplié successivement par

$$\mathfrak{V}\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3, \quad \mathfrak{V}\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{V}\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2$$

<sup>1</sup> M. J. NEUBERG a énoncé ce théorème en 1875 dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (démonstration par H. van AUBEL, *N. C. M.*, t. II, p. 316, et par E. LEMOINE, *J. M. E.*, 1884, p. 50). Il a étudié la correspondance entre l'orthopolaire et l'orthopôle dans la *N. C. M.*, 1878, p. 379. (Voir *Mathesis*, t. IV, avril 1914, p. 92.)

donne pour les coordonnées de l'orthopôle

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 \\ &= \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{11} + \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{12} + \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{13} \\ &: \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{12} + \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{22} + \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{23} \\ &: \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{13} + \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{23} + \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{33} \end{aligned}$$

si l'on pose par abréviation pour les coefficients des produits  $\alpha_r \alpha_s$

$$\Omega_{ik} \equiv \sin a_i \sin a_k \cos A_{ik} \equiv \Omega_{ki}.$$

Il suffira maintenant de se rappeler que  $\Delta$  étant  $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3]$ , nous avons :

$$\alpha_1 \equiv \text{Vr}_2 \mathbf{f}_1 \cdot \text{Vr}_3 \equiv \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 = \Delta^2 u_2 u_3 - \cos a_1 \Omega(uu).$$

La première coordonnée  $x_1$  de l'orthopôle devient alors la somme de

$$\begin{aligned} \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{11} &= [\Delta^4 u_1^2 u_2 u_3 - \Delta^2 (c_2 u_1 u_2 + c_3 u_1 u_3) \Omega(uu) + c_2 c_3 \Omega^2(uu)] s_1 s_1 \\ \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{12} &= [\Delta^4 u_2^2 u_3 u_1 - \Delta^2 (c_3 u_2 u_3 + c_1 u_2 u_1) \Omega(uu) + c_3 c_1 \Omega^2(uu)] s_1 s_2 C_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{13} &= [\Delta^4 u_3^2 u_1 u_2 - \Delta^2 (c_1 u_3 u_1 + c_2 u_3 u_2) \Omega(uu) + c_1 c_2 \Omega^2(uu)] s_1 s_3 C_2 \end{aligned}$$

8. — Lorsqu'on passe au cas-limite du plan, les termes qui contiennent la quatrième puissance de

$$\Delta \equiv \sin A_i \sin A_k \sin a_{ik}$$

deviennent infiniment petits par rapport aux autres. Il ne reste, lorsqu'on pose

$$\lim \Delta \equiv \lim \sin A_i \sin A_k \sin a_{ik} = \sin A_i \sin A_k \cdot a_{ik} \equiv \bar{\Delta} \quad \text{et} \quad \lim \cos a_i = 1$$

qu'une première partie qui devient à la limite

$$-\bar{\Delta}^2 a_1 [(a_2 C_3 + a_3 C_2) u_2 u_3 + (a_1 + a_3 C_2) u_3 u_1 + (a_1 + a_2 C_3) u_1 u_2]$$

ou

$$\bar{\Delta}^2 a_1 [a_1 u_2 u_3 + a_2 \cos A_3 \cdot u_3 u_1 + a_3 \cos A_2 \cdot u_1 u_2]$$

et d'une seconde partie du même ordre

$$\begin{aligned} \Omega(uu) [c_2 c_3 (1 - c_1^2) + c_1 c_2 (c_1 c_3 - c_2) + c_1 c_3 (c_1 c_2 - c_3)] \equiv \\ \Omega(uu) (c_1 c_2 - c_3) (c_1 c_3 - c_2) \equiv \Omega(uu) \sin^2 a_1 \sin a_2 \sin a_3 \cos A_2 \cos A_3 \end{aligned}$$

qui devient à la limite  $a_1^2 a_2 a_3 \cos A_2 \cos A_3 \cdot \Omega(uu)$ . Si enfin nous introduisons au lieu des coordonnées  $u_i$  de la droite ses distances  $p_i$  aux sommets du triangle en posant<sup>1</sup>  $\bar{\Delta}u_i = \sqrt{\Omega(uu)} \cdot p_i$  nous obtenons comme première coordonnée barycentrique de l'orthopôle

$$a_1 [a_1 a_2 a_3 C_2 C_3 + a_1 p_2 p_3 + a_3 C_2 p_1 p_2 + a_2 C_3 p_1 p_3] .$$

Les deux autres s'en déduisent par permutation cyclique des indices.

9. — Lorsqu'il s'agit inversement de trouver la droite sphérique  $\mathfrak{f}(u_i)$ , son orthopôle  $\mathfrak{r}_0$  étant donné, il suffira d'exprimer que  $\mathfrak{r}_0$  est situé sur les droites  $q_i$ , ce qui fournit les équations

$$\mathfrak{r}_0 \vee \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}, \mathfrak{r}_1 \equiv [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_1] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{r}_1 + [\mathfrak{f}_1 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} = 0$$

$$\mathfrak{r}_0 \vee \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}, \mathfrak{r}_2 \equiv [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_2] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{r}_2 + [\mathfrak{f}_2 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_2] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} = 0$$

$$\mathfrak{r}_0 \vee \mathfrak{f}_3, \mathfrak{f}, \mathfrak{r}_3 \equiv [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_3] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{r}_3 + [\mathfrak{f}_3 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_3] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} = 0$$

du second degré par rapport aux  $u_i$ . Lorsqu'une droite  $u_i$  satisfait à deux de ces équations, elle suffira à cause de l'identité (IV) également à la troisième. Il y a donc sur la sphère quatre *orthopolaires* correspondant au point  $\mathfrak{r}_0$  comme orthopôle; ce sont les tangentes communes aux courbes de seconde classe.

Il est facile de trouver les six foyers des trois coniques sphériques<sup>2</sup>. En effet,  $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} \equiv \Omega(uu) = 0$  étant l'équation de la courbe absolue, le premier terme dans chacune de ces équations égalé à zéro, donne l'équation de deux foyers, de sorte que les six foyers en question sont :

$$\mathfrak{r}_1, \quad \vee \mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_1; \quad \mathfrak{r}_2, \quad \vee \mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_2; \quad \mathfrak{r}_3, \quad \vee \mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_3 .$$

Trois de ces foyers coïncident avec les sommets; les trois autres sont situés sur les côtés du triangle à des distances  $\pi/2$  du point  $\mathfrak{r}_0$ . Lorsqu'on passe au plan, les trois derniers

<sup>1</sup> Soit :  $\sin A_1 \cdot u_1 \mathfrak{f}_1 + \sin A_2 \cdot u_2 \mathfrak{f}_2 + \sin A_3 \cdot u_3 \mathfrak{f}_3 = u_4 \mathfrak{f} = \sqrt{\Omega(uu)} \cdot \mathfrak{f}$ . En multipliant par  $\mathfrak{r}_1$  nous aurons  $\sin A_1 \sin h_1 u_1 = u_4 \sin p_1$  ou  $\bar{\Delta} \cdot u_1 = \sqrt{\Omega(uu)} \sin p_1$  et  $\bar{\Delta} \cdot u_1 = \sqrt{\Omega(uu)} \cdot p_1$ .

<sup>2</sup> « Essai de géométrie sphérique », p. 250-251.

foyers s'éloignent à l'infini; dans le plan les coniques sont par conséquent des paraboles ayant leurs foyers aux sommets du triangle et leurs axes parallèles aux côtés opposés.

10. — Si dans l'identité IV on prend, au lieu des quatre droites, quatre points, c'est-à-dire au lieu du trilatère  $\mathfrak{f}_i$  et de la droite  $\mathfrak{f}$ , le triangle  $\mathfrak{r}_i$  et le point  $\mathfrak{r}$ , on obtient

$$V_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3} + V_{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1} + V_{\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2} \equiv 0 ,$$

identité qui exprime simplement le théorème réciproque; nous n'en parlons pas.

11. — Nous arrivons à un autre théorème qu'on pourrait appeler le théorème *semi-réciproque*, en gardant dans notre identité les côtés du trilatère  $\mathfrak{f}_i$ , mais en remplaçant la droite quelconque  $\mathfrak{f}$  par un point quelconque  $\mathfrak{r}$ . Dans sa nouvelle forme :

$$V_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} + V_{\mathfrak{f}_2, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_3 \mathfrak{f}_1} + V_{\mathfrak{f}_3, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2} \equiv 0 , \quad (V)$$

l'identité nous apprend : *Lorsque par un point quelconque P( $\mathfrak{r}$ ) d'un triangle sphérique ou plan  $A_i$  on fait passer des droites  $q_i$  normales ou conjuguées aux droites  $p_i \equiv A_i P$ , leurs points d'intersection  $Q_i$  avec les côtés correspondants sont collinéaires<sup>1</sup>.*

En effet, on a successivement pour le sommet  $A_1$ , pour la droite  $p_1$ , pour la normale  $q_1$  et pour son point d'intersection  $Q_1$  avec le premier côté du triangle

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv V_{\mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} , & p_1 &\equiv V_{\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} \\ q_1 &\equiv V_{\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} , & Q_1 &\equiv V_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} , \end{aligned}$$

L'identité V nous montre que le point  $Q_1$  et les deux autres  $Q_2$  et  $Q_3$  qu'on obtient en partant des sommets  $A_2$  et  $A_3$  sont bien collinéaires. q. e. d.

<sup>1</sup> Voir encore ma « Note sur la géométrie du triangle et du tétraèdre » dans l'*Ens. Math.*, 1917, pp. 273-275, à propos de laquelle M. A. KIEFER m'a fait remarquer que pour le cas spécial où P est le centre du cercle inscrit, le théorème se trouve chez Steiner parmi les « Vermischte Sätze und Aufgaben » (*Ges. Werke*, Bd. 2, S. 673) et chez A. KIEFER, « Ueber eine Dreiecksaufgabe und bezügliche Sätze » (*Archiv der Mathematik und Physik*, III, Reihe XII, Heft 1, S. 30).

12. — Si les coordonnées  $x_i$  du point  $\mathbf{r}$  sont données, il est facile d'exprimer les coordonnées  $u_i$  de la droite correspondante en fonction des  $x_i$ . Nous devons en effet chercher la droite sphérique qui relie les points

$$Q_1 \equiv \alpha_2 \mathbf{r}_2 - \alpha_3 \mathbf{r}_3 ; \quad Q_2 \equiv \alpha_3 \mathbf{r}_3 - \alpha_1 \mathbf{r}_1$$

lorsque les coefficients  $\alpha_i$  sont déterminés par les équations :

$$\alpha_1 = \mathbf{Vr}_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_3 ; \quad \alpha_2 = \mathbf{Vr}_3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_1 ; \quad \alpha_3 = \mathbf{Vr}_1 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_2 .$$

Nous trouvons son vecteur en formant le produit vectoriel ou externe. Ceci nous permet de conclure (2), que les coordonnées  $u_i$  de la droite cherchée satisfont à

$$u_1 : u_2 : u_3 = \alpha_2 \alpha_3 : \alpha_3 \alpha_1 : \alpha_1 \alpha_2 .$$

Quant aux coefficients  $\alpha_i$ , on voit donc sans peine que

$$\alpha_1 \equiv \mathbf{Vr}_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_3 \equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_3 - \cos a_1 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \omega(x_2) \omega(x_3) - \cos a_1 \omega(xx)$$

pourvu que  $\omega(x_2)$  et  $\omega(x_3)$  soient les demi-dérivées partielles par rapport à  $x_2$  et  $x_3$  de la forme quadratique

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \equiv \omega(xx) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\cos a_1 x_2 x_3 + 2\cos a_2 x_3 x_1 + 2\cos a_3 x_1 x_2 \\ &\equiv (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} - \dots = l_\infty^2 - 4x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} - \dots \end{aligned}$$

13. — Dans le cas-limite du plan la valeur trouvée pour  $\alpha_1$

$$\begin{aligned} &\left( l_\infty - 2x_1 \sin^2 \frac{a_3}{2} - 2x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} \right) \left( l_\infty - 2x_2 \sin^2 \frac{a_1}{2} - 2x_1 \sin^2 \frac{a_2}{2} \right) \\ &- \left( 1 - 2\sin^2 \frac{a_1}{2} \right) \left( l_\infty^2 - 4x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} - 4x_3 x_1 \sin^2 \frac{a_2}{2} - \dots \right) \end{aligned}$$

devient

$$x_1^2 (a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) + x_1 x_2 (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2) + x_1 x_3 (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) + 2x_2 x_3 a_1^2$$

etc. Nous pouvons cependant donner aux  $\alpha_i$ , donc aux  $u_i$  de la droite, une forme plus simple. Nous avons en effet :

$$\alpha_1 \equiv \mathbf{Vr}_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_3 = -\sin PA_2 \sin PA_3 \cdot \cos \Phi_1$$

si nous appelons  $\Phi_1$  l'angle formé par les droites  $PA_2$  et  $PA_3$ .

De cette manière nous trouvons pour le cas de la sphère

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\sin PA_1}{\cos \Phi_1} : \frac{\sin PA_2}{\cos \Phi_2} : \frac{\sin PA_3}{\cos \Phi_3}$$

et dans le cas d'un triangle plan.

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{PA_1}{\cos \Phi_1} : \frac{PA_2}{\cos \Phi_2} : \frac{PA_3}{\cos \Phi_3}$$

14. — Reprenons l'identité (V) et multiplions-la scalairement par le vecteur quelconque  $\mathfrak{f}_4$ . Dans sa nouvelle forme<sup>1</sup>

$$V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_4 + V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_3 \mathfrak{f}_1 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_4 + V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_3 \mathfrak{f}_4 \equiv 0 \quad (\text{VI})$$

l'identité nous fournit une démonstration très simple du *théorème*, généralisé pour la sphère, de *Bodenmiller*<sup>2</sup>:

*Le lieu géométrique du point P tel que les droites sphériques qui le relient à deux points donnés de la surface sphérique sont normales ou conjuguées est une conique; les trois coniques qui correspondent aux trois couples de sommets d'un quadrilatère appartiennent à un même faisceau.*

En effet, lorsque les côtés du quadrilatère sont  $\mathfrak{f}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), nous aurons en  $V\mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3$  et  $V\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_4$  deux sommets opposés. Les droites qui le relient au point  $\mathfrak{r}$  sont  $V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3$  et  $V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_4$ , et ces droites sont normales (ou conjuguées) lorsque  $\mathfrak{r}$  satisfait à l'équation de la conique

$$V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_4 = 0.$$

Nous obtenons d'autres coniques en partant des deux autres couples de sommets opposés; l'identité nous montre que les points communs aux deux premières satisfont également à la troisième, ou bien que les trois coniques appartiennent à un même faisceau.

<sup>1</sup> Il est en effet

$$\mathfrak{f}_4 \cdot V\mathfrak{f}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \cdot V\mathfrak{f}_4 \mathfrak{f}_1 \equiv -V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_4 \mathfrak{f}_1.$$

<sup>2</sup> C. GUDERMANN. *Grundriss der analytischen Sphärik*, 1830, S. 138.