

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1918)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES TRAJECTOIRES D'UN MOBILE SOUMIS A UNE FORCE CENTRALE ET A UNE RÉSISTANCE DE MILIEU  
**Autor:** Cailler, C.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18025>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

traèdre polaire à  $\Phi$ , qui définit réellement la même congruence (T) que le premier.

Il existe une sextuple infinité de tétraèdres polaires à  $\Phi$ ; et par conséquent une sextuple infinité de groupes  $B_i$  peuvent être définis de la sorte.

*Il n'y a donc aucune relation entre les points  $B_i$ .*

---

SUR LES TRAJECTOIRES D'UN MOBILE  
SOU MIS A UNE FORCE CENTRALE ET A UNE  
RÉSISTANCE DE MILIEU

PAR

C. CAILLER (Genève).

---

Je ne sais si une propriété mécanique, extrêmement simple, de la spirale logarithmique a été signalée jusqu'ici. La voici :

*Une force attractive étant donnée, fonction quelconque de la distance au centre, il est toujours possible de lui adjoindre une résistance fonction de la vitesse, de telle manière que parmi les différentes trajectoires décrites par le mobile soumis aux deux forces figure une spirale logarithmique.*

Soient  $m$  la masse du corps,  $mR(r)$  la force attractive,  $m\varrho G(\varrho)$  la résistance;  $R$  et  $G$  désignent ainsi deux fonctions des variables  $r$  et  $\varrho$  respectivement, toutes deux positives.

Choisissons pour variables le rayon  $r$  et l'angle  $i$  que forme la vitesse  $\varrho$  avec le rayon vecteur prolongé, de manière que  $\varrho \cos i = \frac{dr}{dt}$ . Ecrivons les équations des aires et des forces vives.

Le moment<sup>1</sup>, relatif au centre, des deux forces agissantes est égal à

$$- m\varrho Gr \sin i ;$$

---

<sup>1</sup> Le moment est compté positif dans le sens où tourne le rayon vecteur.

on a donc d'abord

$$d(vr \sin i) = -vGr \sin i dt = -G \operatorname{tg} i r dr ;$$

c'est l'équation des aires.

En second lieu, le travail des deux forces réunies est égal à

$$-mRdr - mv^2Gdt ,$$

ou encore

$$-m \left( Rdr + vG \frac{dr}{\cos i} \right) ;$$

par suite, débarrassée du facteur  $m$ , l'équation des forces vives sera

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = - \left( R + \frac{vG}{\cos i} \right) dr .$$

En résumé, les équations cherchées sont

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dr}(vr \sin i) &= -Gr \operatorname{tg} i , \\ \frac{d}{dr}\left(\frac{v^2}{2}\right) + R &= -\frac{vG}{\cos i} ; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

elles sont du premier ordre par rapport aux inconnues  $v$  et  $i$ , la variable indépendante étant  $r$ . Une fois intégré le système (1), le problème du mouvement peut être considéré comme résolu : en effet,  $\theta$  étant l'angle polaire du rayon vecteur, nous aurons encore

$$d\theta = \operatorname{tg} i \frac{dr}{r} , \quad dt = \frac{dr}{v \cos i} . \quad (2)$$

Ces formules déterminent la trajectoire, et le temps, en fonction de la variable  $r$ .

Récrivons le système (1) sous la forme

$$\left. \begin{aligned} r \left( \frac{dv}{dr} + \frac{G}{\cos i} \right) + v \left( 1 + r \cot i \frac{di}{dr} \right) &= 0 , \\ v \left( \frac{dv}{dr} + \frac{G}{\cos i} \right) + R &= 0 , \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

et supposons que la trajectoire soit une spirale logarithmique. Dans ce cas,  $i$  est constant, et (3) devient

$$r \left( \frac{dv}{dr} + \frac{G}{\cos i} \right) + v = 0 , \quad v \left( \frac{dv}{dr} + \frac{G}{\cos i} \right) + R = 0 ,$$

ou bien

$$v^2 - rR = 0, \quad G = -\frac{\cos i}{r} \frac{d(vr)}{dr}. \quad (4)$$

Si l'attraction  $R$  est donnée en  $r$ , la première formule définit la vitesse le long de la trajectoire spirale, la seconde détermine en fonction de  $r$ , ou de  $v$ , la résistance  $G$  capable de produire le mouvement dont il s'agit. Enfin le temps sera donné par l'équation (2), qui est devenue

$$dt = \frac{dr}{\cos i \sqrt{rR}}. \quad (5)$$

Par exemple, dans le cas de l'attraction newtonienne, comment faut-il choisir la loi de résistance pour que la spirale logarithmique soit l'une des trajectoires possibles ?

Nous avons ici  $R = \frac{k^2}{r^2}$ , donc

$$v^2 = \frac{k^2}{r}, \quad r = \frac{k^2}{v^2}, \quad rv = \frac{k^2}{v}$$

et de là, d'après la seconde formule (4)

$$G = -\frac{\cos i}{2k^2} v^3.$$

Et comme, sauf le facteur  $m$ , la résistance est égale, à  $vG(v)$ , cette force est donc

$$F = -\frac{\cos i}{2k^2} v^4,$$

elle varie comme la 4<sup>e</sup> puissance de la vitesse.

Nous devons avoir  $F > 0$ , ainsi le mouvement n'est possible que si  $\cos i < 0$ ; autrement dit, le mobile décrit la spirale en s'approchant de son pôle. Le temps de chute est fini, car on a

$$dt = +\frac{1}{k \cos i} \sqrt{r} dr, \quad t = +\frac{1}{k \cos i} \int_r^0 \sqrt{r} dr = -\frac{2r^{3/2}}{3k \cos i}.$$

Il importe de remarquer que dans le cas où la résistance  $F = lv^4$  est donnée a priori, la spirale est complètement connue, à l'orientation près; on doit avoir

$$\cos i = -2lk^2$$

et ainsi, pour la possibilité du mouvement en question, il faut que les coefficients des deux forces vérifient la condition

$$lk^2 < \frac{1}{2}.$$

Le calcul précédent se généralise à l'instant. Faisons

$$R = ar^p, \quad F = vG(v) = bv^q.$$

D'après la première équation (4), la force  $R$  ne saurait jamais être répulsive, il faut donc, pour la possibilité d'une solution, que  $a$  soit positif.

On trouve alors tout de suite qu'on doit avoir

$$q = \frac{2p}{p+1}, \quad b = -\frac{1}{2}(p+3)a^{\frac{1}{1+p}} \cos i, \quad v = \sqrt{ar}^{\frac{1+p}{2}}. \quad (6)$$

Mais  $q$  doit être positif pour que la force  $F$  croisse avec la vitesse, par conséquent  $p$  ne peut pas être compris entre 0 et  $-1$ . Alors, suivant que  $p$  est  $\geq -3$ , la quantité  $\cos i$  est  $\leq 0$ , et le mobile, quand il sera placé dans les conditions initiales voulues, s'approchera du centre attractif ou s'en écartera en suivant l'arc de spirale logarithmique. L'angle  $i$  que forme cette spirale avec ses rayons vecteurs est déterminé par la seconde formule (6); il faut donc, pour qu'il y ait une solution, que les paramètres  $a$  et  $b$  des forces  $R$  et  $F$  vérifient encore l'inégalité

$$\left| \frac{2b}{p+3} \right| a^{-\frac{1}{1+p}} < 1^1.$$

Ces différentes conditions nécessaires pour la description de la spirale sont assez limitatives. Quand elles ne sont pas remplies, le problème exige l'intégration du système (3); il est facile de voir que dans le cas qui vient d'être examiné

$$R = ar^p, \quad F = bv^{\frac{2p}{p+1}}.$$

ce système peut être réduit à une seule équation du premier ordre.

<sup>1</sup> En tenant compte des dimensions des quantités  $a$  et  $b$ , on constate aisément l'homogénéité de cette condition.