

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1918)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA GERBE DE CUBIQUES GAUCHES PASSANT PAR CINQ POINTS  
**Autor:** Gonseth, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18024>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LA GERBE DE CUBIQUES GAUCHES PASSANT PAR CINQ POINTS

PAR

F. GONSETH (Zurich).

1. — On trouve dans les *Memorie di Geometria* de CAPORALI (p. 49-51), une suite d'énoncés concernant la congruence des triangles conjugués à la fois à une conique  $c_2$ , et à une cubique plane  $c_3$  (et par conséquent à toute autre cubique passant par les points d'intersection de  $c_2$  et de  $c_3$ ). Je relève en particulier les suivants :

a) Chaque triangle est en général déterminé par un sommet.

b) Font exception dix points  $A_{ik}$ , dont chacun est le sommet d'une simple infinité de triangles ayant le côté opposé commun,  $a_{ik}$ . Les énoncés suivants montrent, en résumé, que la configuration des points  $A_{ik}$  et des droites  $a_{ik}$  est semblable à celle qu'on obtient en coupant par un plan les dix droites et les dix plans qui passent par cinq points de l'espace. En fait, je veux démontrer que :

*La congruence (T) des triangles en question peut être obtenue en coupant par un plan  $\pi$ , arbitraire, la gerbe des cubiques gauches qui passent par cinq points de l'espace,  $M_1, \dots, M_5$ . Il en résultera naturellement que les points  $A_{ik}$  et les droites  $a_{ik}$  sont effectivement les intersections, par  $\pi$ , des droites et des plans passant par les points  $M_1, \dots, M_5$ .*

2. — Je nomme  $A_{ik}$  le point d'intersection de  $\pi$  et de la droite  $M_i M_k$ ;  $a_{ik}$  la droite d'intersection de  $\pi$  et du plan joignant les trois points restants. On sait<sup>1</sup> que les dix points

<sup>1</sup> SERRET, *Géométrie de situation*.

$A_{ik}$  sont les pôles des droites  $a_{ik}$  suivant une conique  $\Gamma$  (la conique conjuguée au pentagone gauche  $M_1, \dots, M_5$ ). Cette conique est aussi l'intersection par  $\pi$  de la quadrique dont  $M_1 \dots M_4$  est un tétraèdre conjugué, et suivant laquelle  $M_5$  et  $\pi$  sont pôle et plan polaire. Reye<sup>1</sup> a de plus remarqué que toute cubique gauche passant par les cinq points  $M_i$  perce  $\pi$  aux trois sommets d'un triangle conjugué à  $\Gamma$ ; en particulier en chaque point de  $\Gamma$  une cubique touche, *et en six points*,  $B_i$ , oscule, le plan  $\pi$ .

On déduit facilement de ce qui précède que :

Si les quatre points  $M_1 \dots M_4$  restent fixes, à chaque position de  $M_5$  correspond une conique  $\Gamma$ , et réciproquement ( $\Gamma$  sera la *correspondante* de  $M_5$ ); si  $M_5$  prend toutes les positions possibles, les  $\Gamma$  correspondantes forment un système linéaire, ponctuel, de dimension 3; si  $M_5$  décrit une cubique gauche  $S$  contenant les quatre premiers points, la correspondante décrit un faisceau ponctuel. Enfin  $S$  devant percer  $\pi$  aux sommets d'un triangle conjugué à la correspondante de chacun de ses points, on arrive à l'énoncé suivant, dont la démonstration à faire découlera :

*La congruence (T) est formée des triangles conjugués à la fois à une conique fixe,  $c_2$ , et à une conique variable dans un réseau (R). R ne doit d'ailleurs pas comprendre  $c_2$ .*

3. — Un triangle est conjugué à une courbe plane de 3<sup>e</sup> ordre,  $c_3$ , lorsque ses trois sommets forment une courbe de 3<sup>e</sup> classe (dégénérée), apolaire à  $c_3$ . D'autre part un triangle conjugué à une conique  $c_2$  l'est aussi à toute cubique formée de  $c_2$  et d'une droite<sup>2</sup>. Par conséquent les groupes de sommets des triangles de la congruence (T) sont compris comme courbes dégénérées parmi les courbes de 3<sup>e</sup> classe apolaires à la fois à  $c_2$  et à une conique variable du réseau R. Je m'en vais d'abord faire voir que ces courbes forment un système linéaire, de dimension 5. Elles sont, en effet, comprises premièrement dans le système linéaire, de dimension 6, des apolaires à  $c_2$ . S'il était en outre vrai que le sys-

<sup>1</sup> REYE, *Geometrie der Lage*, II, chap. 26.

<sup>2</sup> CAPORALI, *Memorie di Geometria*, p. 153.

tème (linéaire) des apolaires de 3<sup>e</sup> classe à  $c_2$  et à une conique  $c_2^{(1)}$  arbitraire de R, et le système semblable déduit de  $c_2$  et d'une seconde conique  $c_2^{(2)}$  de R, eussent un faisceau de courbes en commun, un raisonnement très facile en déduirait le résultat désiré. Il faudrait donc montrer que les courbes de 3<sup>e</sup> classe apolaires à la fois à  $c_2$ ,  $c_2^{(1)}$  et  $c_2^{(2)}$  forment un faisceau. Or une courbe de 3<sup>e</sup> classe est en général apolaire à un réseau de coniques. D'autre part, il y a  $\infty^8$  réseaux de coniques possibles, et il existe  $\infty^9$  courbes de 3<sup>e</sup> classe. Donc :

*Les triangles de (T) sont compris dans un système linéaire L, de dimension 5, de courbes de 3<sup>e</sup> classe.*

4. — Les six points  $B_i$  d'osculution, dont il est question au paragraphe 2, sont des courbes spéciales de ce système réduites à un point triple; ces courbes sont naturellement apolaires à  $c_2$  et à toutes les cubiques qui les contiennent. Elles forment d'autre part une base suffisante du système L; et comme la relation d'apolarité est linéaire, il en résulte que : Tous les groupes de trois sommets des triangles de (T) forment des courbes de 3<sup>e</sup> classe apolaires à  $c_2$  et à toute cubique qui passe par les  $B_i$ ; ou encore :

*Les triangles de (T) sont conjugués à  $c_2$  et à toute cubique qui passe par les six  $B_i$ .*

5. —  $M_5$  est maintenu fixe, de même que  $c_2$ . Soit  $\Phi$  une quadrique passant par  $c_2$ , et pour laquelle  $M_5$  et  $\pi$  sont pôle et plan polaire. A chaque tétraèdre polaire de  $\Phi$  correspondra une congruence de triangles (T). Pour que les congruences correspondant à deux de ces tétraèdres coïncidassent, il faudrait que ces derniers fussent homologues, puisque les sommets en devraient être alignés deux à deux sur  $M_5$ ; et les plans se couper deux à deux sur le plan  $\pi$ . Il faudrait aussi, par conséquent, que la quadrique  $\Phi$  fût transformée en elle-même par la même homologie, de centre  $M_5$ , et de plan axial  $\pi$ .

Or, parmi les homologies admettant même centre et même plan axial, il en est une et une seule qui réalise ce dernier fait : c'est l'homologie harmonique. Au tétraèdre primitif  $M_1M_2M_3M_4$  correspond dans cette dernière un second té-

traèdre polaire à  $\Phi$ , qui définit réellement la même congruence (T) que le premier.

Il existe une sextuple infinité de tétraèdres polaires à  $\Phi$ ; et par conséquent une sextuple infinité de groupes  $B_i$  peuvent être définis de la sorte.

*Il n'y a donc aucune relation entre les points  $B_i$ .*

## SUR LES TRAJECTOIRES D'UN MOBILE SOU MIS A UNE FORCE CENTRALE ET A UNE RÉSISTANCE DE MILIEU

PAR

C. CAILLER (Genève).

Je ne sais si une propriété mécanique, extrêmement simple, de la spirale logarithmique a été signalée jusqu'ici. La voici :

*Une force attractive étant donnée, fonction quelconque de la distance au centre, il est toujours possible de lui adjoindre une résistance fonction de la vitesse, de telle manière que parmi les différentes trajectoires décrites par le mobile soumis aux deux forces figure une spirale logarithmique.*

Soient  $m$  la masse du corps,  $mR(r)$  la force attractive,  $m\varphi G(\varphi)$  la résistance;  $R$  et  $G$  désignent ainsi deux fonctions des variables  $r$  et  $\varphi$  respectivement, toutes deux positives.

Choisissons pour variables le rayon  $r$  et l'angle  $i$  que forme la vitesse  $\varphi$  avec le rayon vecteur prolongé, de manière que  $\varphi \cos i = \frac{dr}{dt}$ . Ecrivons les équations des aires et des forces vives.

Le moment<sup>1</sup>, relatif au centre, des deux forces agissantes est égal à

$$- m\varphi Gr \sin i ;$$

<sup>1</sup> Le moment est compté positif dans le sens où tourne le rayon vecteur.