SUR LES CONGRUENCES LINÉAIRES DE CUBIQUES GAUCHES DOUÉES D'UNE SEULE COURBE SINGULIÈRE

Autor(en): **Godeaux, Lucien**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18023

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LES CONGRUENCES LINÉAIRES DE CUBIQUES GAUCHES DOUÉES D'UNE SEULE COURBE SINGULIÈRE

PAR

Lucien GODEAUX (Armée belge).

Dans un travail publié il y a quelques années, j'avais abordé le problème de la détermination des congruences linéaires de coniques douées d'une seule courbe singulière [1]. J'avais ensuite pu étendre ma méthode au cas de congruences linéaires de courbes planes, sans points singuliers, dotées d'une ou deux courbes singulières (l'une de ces dernières n'étant pas une droite [2]).

A la fin de mon premier travail, j'avais émis l'idée que la même méthode pourrait être utilisée dans la recherche des congruences linéaires de cubiques gauches. C'est dans cet ordre d'idées qu'est écrit le travail suivant. J'ai abordé l'étude des congruences linéaires de cubiques gauches dotées d'une seule courbe singulière. Le résultat auquel je suis arrivé est malheureusement négatif, en ce sens que j'établis que :

Il n'existe aucune congruence linéaire de cubiques gauches douée d'une seule courbe singulière.

J'ajouterai que la même méthode peut être appliquée à la recherche des complexes linéaires de cubiques gauches,

---

[1] *Recherches sur les systèmes de coniques de l'espace* (Thèse présentée à l'Université de Liége). *Mémoires de la Soc. R. des Sc. de Liége*, 1911.

Je rappelle à cette occasion que, par une autre méthode, M. MONTESANO avait auparavant déterminé toutes les congruences linéaires de coniques (*Rend. R. Accad. di Napoli*, 1895).

[2] *Sulle congruence lineari di curve piane dotate di una sola curva singolare* (*Rend. Circ. di Palermo*, 1912). — *Sur les congruences linéaires de courbes planes* (*Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie*, 1912).

dans un espace linéaire à quatre dimensions, comme j'espère le montrer dans un prochain travail.

La méthode employée ici ne fait appel qu'à des propriétés élémentaires de Géométrie; elle est presque entièrement basée sur cette remarque que dans une congruence linéaire de courbes, une courbe de la congruence ne peut rencontrer une surface engendrée par ∞^1 courbes de la congruence, qu'en des points singuliers.

1. — Soit Σ une congruence linéaire, irréductible, de cubiques gauches, dotée d'une seule courbe singulière C, d'ordre h. Supposons que les courbes de Σ ne touchent, le long de C, aucune surface circonscrite à cette courbe.

Désignons par m le nombre de courbes de Σ s'appuyant sur deux droites gauches, ne rencontrant ni l'une, ni l'autre C, par μ le nombre de ces courbes passant par m point de C et s'appuyant sur une droite ne rencontrant pas C.

Les cubiques de Σ, s'appuyant sur une droite d, forment donc, en général, une surface F_d d'ordre m, passant μ fois par C.

Une cubique de Σ, n'appartenant pas à F_d, rencontre cette surface en des points situés sur C, sans quoi Σ ne serait pas linéaire. De plus, ces points sont en général distincts, sans quoi les courbes de Σ toucheraient, le long de C, une surface passant par cette courbe. On sait que les cubiques gauches d'une congruence linéaire ont dix points singuliers. On a donc

$$3m = 10\mu ,$$

c'est-à-dire, ε étant un entier positif,

$$m = 10\varepsilon , \qquad \mu = 3\varepsilon .$$

Deux surfaces F_d, $F_{d'}$ ont en commun la courbe C, les m courbes de Σ s'appuyant sur les droites d, d' et les courbes exceptionnelles éventuelles de Σ. De plus, F_d et $F_{d'}$ ne se touchent pas, en général, le long de C; on a donc pour l'intersection de ces deux surfaces, une expression de la forme

$$m^2 = 3m + h\mu^2 + \rho ,$$

$\rho \geqq 0$ provenant de l'existence éventuelle de courbes exceptionnelles.

Par suite,

$$\rho = (100 - 9h)\varepsilon^2 - 30\varepsilon .$$

On a donc

$$(100 - 9h)\varepsilon \geqq 30 ,$$

d'où $h \leqq 11$.

D'autre part, si la courbe C appartenait à une surface cubique, les courbes de Σ rencontreraient celle-ci en dix points et seraient entièrement sur cette surface, ce qui est absurde. Une courbe d'ordre inférieur à sept se trouvant toujours sur une surface cubique, on a donc $h > 6$. Nous parvenons donc à ce premier résultat que :

La courbe singulière de Σ a l'ordre 7, 8, 9, 10 *ou* 11.

2. — Les courbes exceptionnelles de Σ peuvent se ranger en deux catégories ; celles de la première catégorie sont des droites qui, comptées chacune trois fois, forment des cubiques de Σ. De telles droites ne font pas, en général, partie des surfaces F_d ; elles s'appuyent en dix points sur C et ne peuvent par suite exister que si $h = 11$.

Les courbes exceptionnelles de la deuxième catégorie sont des droites ou des coniques qui, avec ∞^1 courbes (coniques ou droites) forment des cubiques de Σ. Soit r une telle courbe. Désignons par R la surface lieu des courbes qui, avec r, forment des courbes de Σ.

Il ne peut exister une cubique de Σ, non dégénérée, s'appuyant sur r en un point non situé également sur C, car une telle cubique appartiendrait à toutes les surfaces F_d, ce qui est absurde. La surface lieu des cubiques de Σ s'appuyant sur r se scinde donc en la surface R et les surfaces lieux des courbes de Σ passant par les points communs à C et à r (surfaces d'ordre $\mu = 3\varepsilon$). Il convient d'examiner en détail les différents cas qui peuvent se présenter.

a) Supposons que r soit une droite qui, avec ∞^1 coniques, forme des courbes de Σ. Une de ces coniques ne peut rencontrer une surface F_d en dehors de C et de r, par suite, si α désigne le nombre de ses points d'appui sur C, r est multiple d'ordre $2m - \alpha\mu$, c'est-à-dire d'ordre $20\varepsilon - 3\alpha\varepsilon$ pour

F_d. D'autre part, ces coniques étant en nombre ∞^1, doivent satisfaire à sept conditions dont l'une est la condition de rencontrer r et les autres des conditions d'appui sur C. On a donc $\alpha \geqq 6$, d'où $\alpha = 6$. Il en résulte que r s'appuie en quatre points distincts ou non sur C. Soit β le nombre de ces points d'appui distincts. La surface Fr, relative à r, se scinde en la surface R, d'ordre $20\varepsilon - 3\alpha\varepsilon = 2\varepsilon$ et β surfaces d'ordre $\mu = 3\varepsilon$, lieu des cubiques de Σ passant par les points d'appui de r sur C. On a donc

$$10\varepsilon = 2\varepsilon + 3\beta\varepsilon ,$$

équation impossible en nombres entiers. Il n'existe donc pas de droite exceptionnelle de l'espèce étudiée ici.

b) Supposons que r soit une conique qui, avec ∞^1 droites, forme des courbes de Σ.

On trouve, en raisonnant comme plus haut, que la conique r s'appuie en huit points distincts ou non sur C et est multiple d'ordre 4ε pour les surfaces F_d. On doit donc avoir, les cubiques de Σ s'appuyant sur r formant une surface d'ordre $2m = 20\varepsilon$,

$$2m = 4\varepsilon + \beta\mu ,$$

β étant le nombre d'appuis distincts de r sur C. On en conclut $\beta = \frac{16}{3}$, ce qui est absurde.

c) Supposons enfin que r soit une droite qui, comptée deux fois, forme avec ∞^1 droites, engendrant une surface R, ∞^1 courbes de Σ. On trouve cette fois que ces ∞^1 droites s'appuyent en deux ou en trois points sur C.

1° Les ∞^1 droites s'appuyent en deux points sur C. Alors r est multiple d'ordre 4ε pour les surfaces F_d et s'appuie en huit points distincts ou non, sur C. Si β est le nombre d'appuis distincts de r sur C, on doit avoir

$$m = 4\varepsilon + \beta\mu ,$$

ou $\beta = 2$. La courbe C a son ordre au moins égal à 10.

2° Les ∞^1 droites s'appuyent en trois points sur C. Alors r est multiple d'indice ε pour F_d et s'appuie en sept points

sur C. Si β a la même signification que tantôt, on doit avoir

$$m = \varepsilon + \beta\mu ,$$

d'où $\beta = 3$. C a l'ordre au moins égal à 10.

3. — Soient, pour fixer les idées, x_1 le nombre de droites exceptionnelles multiples d'ordre 4ε pour F_d, x_2 celui des droites exceptionnelles multiples d'ordre ε pour ces surfaces. On a

$$\rho \geqq (16x_1 + x_2)\varepsilon^2 ,$$

le signe $>$ n'étant valable que s'il y a contact entre les surfaces F_d le long des droites exceptionnelles.

On en déduit

$$(100 - 9h - 16x_1 - x_2)\varepsilon \geqq 30 .$$

Si $h = 7$, $x_1 = x_2 = 0$, $\rho = 0$ et on a $\varepsilon = \frac{30}{31}$, ce qui est absurde.

Si $h = 8$, $x_1 = x_2 = 0$, $\rho = 0$ et $\varepsilon = \frac{30}{28}$, ce qui est impossible.

Si $h = 9$, $x_1 = x_2 = 0$, $\rho = 0$, $\varepsilon = \frac{30}{19}$, ce qui est impossible.

Lorsque $h = 10$, on a

$$(10 - 16x_1 - x_2)\varepsilon \geqq 30 ,$$

d'où $x_1 = 0$.

Remarquons d'ailleurs que x_2 ne peut être supérieur à 2, car si $x_2 = 3$, la quadrique passant par les trois droites exceptionnelles rencontre C en 21 points et contient donc cette courbe et par suite, toutes les cubiques de Σ, ce qui est absurde.

Lorsque $h = 11$, on a

$$(1 - 16x_1 - x_2)\varepsilon \geqq 30 ,$$

d'où $x_1 = x_2 = 0$, $\rho = 0$, $\varepsilon = 30$.

Nous aurons donc quatre cas à examiner.

1° $h = 10$, $x_2 = 0$, $\rho = 0$.

2° $h = 10$, $x_2 = 1$.

3° $h = 10$, $x_2 = 2$.

4° $h = 11$, $\rho = 0$.

4. — Lorsque la courbe C est d'ordre 10 et que $x_2 = 0$, Σ ne possède aucune courbe exceptionnelle. On a nécessairement $\rho = 0$, $\varepsilon = 3$. Les surfaces F_d sont d'ordre 30 et passent neuf fois par C.

La courbe C possède certainement des trisécantes, car autrement, en la projetant d'un de ses points sur un plan, on verrait que son genre est égal à 28 ; mais alors, elle appartiendrait à une infinité de quadriques, ce qui est absurde.

Considérons la surface F_d lorsque d est une trisécante de C. F_d se scinde en quatre surfaces dont trois sont les surfaces d'ordre 9, lieux des cubiques de Σ passant par les points d'appui de d sur C. La quatrième est par suite une surface cubique. Nous avons déjà vu que C ne peut se trouver sur une surface cubique, donc les cubiques de Σ s'appuyant sur une trisécante de C, forment une surface cubique et s'appuyent sur C en des points fixes. La surface F_d passant neuf fois par C, il en résulte qu'une surface, lieu des courbes de Σ passant par un point de C, passe trois fois par cette courbe. Mais une courbe de Σ, n'appartenant pas à une telle surface, ne peut la rencontrer en dehors de C. Or on trouve qu'elle la rencontre, sur C en $10 \times 3 = 30$ points, ce qui est impossible. On est conduit à une absurdité et on ne peut donc avoir $d = 10$, $x_2 = 0$.

5. — Nous traiterons simultanément les cas où l'on a $h = 10$, $x_2 = 1$ ou $x_2 = 2$. Nous avons vu qu'une droite exceptionnelle r est multiple d'ordre ε pour une surface F_d. Les plans tangents à cette surface et passant par r sont les plans comptant les ε droites qui, avec r, forment des courbes de Σ, qui s'appuyent sur d. Ils sont donc variables avec d et on a, par suite,

$$\rho = x_2 \varepsilon^2 , \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \varepsilon = \frac{30}{10 - x_2} .$$

Or, ni pour $x_2 = 1$, ni pour $x_2 = 2$, ε n'est entier. On ne peut donc avoir $h = 10$, $x_2 > 0$.

On en conclut que si Σ existe, sa courbe singulière C est d'ordre 11.

6. — Si $h = 11$, on a $\rho = 0$ et, par conséquent, $\varepsilon = 30$. Les surfaces F_d sont d'ordre 300 et passent 90 fois par C.

Considérons un point P non situé sur C. Par ce point il passe une droite s'appuyant en deux points sur chaque cubique de Σ. Le lieu de ces points d'appui est une surface Φ_P. Soit n la classe de Σ, c'est-à-dire le nombre de cubiques de Σ ayant pour bisécante une droite arbitraire. La surface Φ_P est rencontrée par une droite passant par P, et en dehors de ce point, en $2n$ points. D'autre part, Φ_P contient la cubique de Σ passant par P et les droites projetant cette cubique de P sont tangentes à Φ_P en P. Le point P est donc double pour Φ_P et cette surface est d'ordre $2(n + 1)$.

Les cubiques de Σ passant par un point de C forment une surface d'ordre 90 passant 27 fois par C, car une cubique quelconque de la congruence ne peut rencontrer cette surface en dehors de C. On peut encore dire que pour deux points de C passent 27 cubiques de Σ. Si ν est la multiplicité de C pour la surface Φ_P, cela signifie que la droite joignant P à un point P′ de C est la corde de ν courbes de Σ passant par P′. Il en résulte que la droite PP′ rencontre la surface lieu des cubiques de Σ passant par P′ en ν points en dehors de P′, ou encore que P′ est multiple d'ordre $90 - \nu$ pour cette dernière surface.

Considérons une courbe de Σ et soit Q un point où cette courbe rencontre Φ_P, en dehors de C. La droite PQ rencontre Φ_P en dehors de P et de Q en $2n - 1$ points dont l'un, d'après la définition de Φ_P, est nécessairement situé sur la courbe de Σ envisagée. Comme il n'y a qu'une corde de cette courbe passant par P, cette courbe doit rencontrer Φ_P en deux seuls points extérieurs à C. On a donc

$$6(n + 1) = 10\nu + 2 , \qquad \text{ou} \qquad 3n + 2 = 5\nu .$$

Considérons maintenant la surface F_d relative à une droite d trisécante de C. Elle se scinde en trois surfaces lieux des courbes de Σ passant par les points d'appui et en une surface F_d^* lieu des courbes de Σ s'appuyant sur d en dehors de C, si toutefois la trisécante d ne fait pas partie d'une courbe dégénérée de Σ. Laissons ce cas de côté pour l'ins-

tant. La surface F_d^* est d'ordre $300 - 3 \times 90 = 30$ et passe 9 fois par C, car une cubique de Σ ne peut la rencontrer en dehors de C sans lui appartenir. Un plan passant par d, rencontre encore la surface F_d^* en une courbe d'ordre 29, passant 8 fois par les points d'appui de d sur C. Il y a donc cinq points de rencontre de d avec cette courbe en dehors de C. Ces points peuvent provenir de courbes de Σ s'appuyant en deux points sur d, ou de cubiques de Σ passant par un des points d'appui de d sur C et rencontrant encore d, ou enfin de courbes de Σ touchant le plan choisi sur d. Dans tous les cas, comme il y a 27 courbes de Σ passant par deux des points d'appui de d sur C, on peut écrire que la classe de la congruence est $n = 3 \times 27 + x$, x étant positif et au plus égal à 5, ou nul. Portons cette valeur de n dans la formule trouvée plus haut. On trouve

$$\nu = 49 + \frac{3x}{5},$$

d'où $x = 0$ ou $x = 5$, $\nu \leqq 52$.

D'après ce que nous avons vu ci-dessus, il en résulte que le point P′ de C est multiple d'ordre $90 - \nu \geqq 38$ pour la surface lieu des cubiques de Σ passant par P′. Mais alors une trisécante de C passant par P′ rencontre cette surface, d'ordre 90, en $2 \times 27 = 54$ points sur C en dehors de P′ et en au moins 38 points en P′, elle fait donc partie de cette surface. Mais cela ne peut se faire que si la trisécante en question fait partie d'une courbe dégénérée de Σ, hypothèse que nous avions exclue. Donc, si la courbe C possède des trisécantes, celles-ci sont des parties de courbes dégénérées de Σ.

Si une trisécante fait partié d'une courbe dégénérée de Σ, elle ne peut rencontrer une surface F_d arbitraire en dehors de C ; or elle rencontre une telle surface en $300 - 3 \times 90 = 30$ points en dehors de C. Nous parvenons donc à cette conclusion que la courbe singulière C de Σ ne peut posséder de trisécantes.

7. — Il est facile de prouver qu'il n'existe pas de courbe gauche d'ordre 11 ne possédant pas de trisécantes pouvant

nous convenir. Supposons que la courbe C possède un point P_1 multiple d'ordre x_1, un point P_2 multiple d'ordre x_2, ... un point P_i multiple d'ordre x_i.

Projetons la courbe d'un de ses points simples. On doit avoir

$$36 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i} x_i(x_i - 1) = 0 .$$

Projetons la courbe de P_1. La courbe étant rationnelle, on a

$$\frac{1}{2}(10 - x_1)(9 - x_1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i} x_i(x_i - 1) = 0 ,$$

d'où, par soustraction,

$$x_1^2 - 10x_1 + 9 = 0 .$$

Evidemment $x_1 > 1$, d'où $x_1 = 9$ et $i = 1$. Mais alors, la courbe C est sur un cône quadratique et ce cône contiendrait toutes les courbes de Σ, ce qui est absurde.

Ainsi est établi le théorème énoncé dans le préambule de notre article.

Front belge, 29 novembre 1917.