

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SPACO
Autor: de Saussure, René
Kapitel: VI. La spacgrandon.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18047>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Du shildon PE k. P'E' estas reciprokan pere de indico c, kiam lu plenumas la kondito:

$$h \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = c,$$

en kiu h signas la longo PP' , kay ω la edrangulo EE' . La cheesto de arbitera konstanto c en la fundamenta reciprokelato montras, ke la shildara geometrio, en spaco S , estas qadratika; seqe, ke 3 shildon estas necesan por difini la lineara monoserio (lineara shildaro) reprezentata da la ci-sura relato; seqas anke, ke 2 linearan shildaron e su sekcas slo *dushildo* (shildoparo).

Kiam indico c estas nula, shildon PE k. $P'E'$ plenumas la kondito $h \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = 0$ (t. e.: $h = 0$, or $\omega = 0$), kay la koresponda lineara monoserio farivas *speciala*. Oni tiam diras, ke la du shildon estas „reciprokan pere de indico nul“, or pli simple, ke lu estas „reciprokan“, sen mencii ni indico; kay tio signifas, ke la shildo povas migri de la pozicio PE al la pozicio $P'E'$ per nura rotaco, sen glito, or per nura glito, sen rotaco; alivorte, tio signifas, ke la shildon PE k. $P'E'$ havas komuna origino P (kay malsaman folion E k. E'), or, ke lu havas komuna folio E (kay malsaman originon P k. P').

REMARKO. — La shildara geometrio en undimensia spaco S estas identa al la geometrio de rigidan korpon (korpara geometrio) cirker fixa axo S , kar, en ti spaco, shildo estas figuro egalvalora al pozicio de irg nia rigida korpo, ligita al axo S .

Oni savas, ke, en la tridimensia spaco, al du irg nin pozicion, K k. K' , de rigida korpo korespondas un, kay nur un, axo S tia, ke la korpo povas migri de pozicio K al pozicio K' per nuran rotaco k. glito ye la axo S , seqe per movo tute entenata en la undimensia spaco S .

Oni povas do vortigi la cia teoremo: same ke, inter du irg nin punkton oni povas streki un, kay nur un, rekto, same: *inter du irg nin pozicion, K k. K', de rigida korpo en tridimensia spaco oni povas streki un, kay nur un, undimensia spaco S.*

VI. LA SPACGRANDON.

1. — En la undimensia spaco S la fundamentan grandon estas: 1^e la *longo* (punktlongo), or nombro de punkton lokantan inter du punkton P k. P' de la rekto S ; 2^e la *angulo* (edrangulo), or nombro de edron lokantan inter du edron E k. E' de la sama rekto S .

2^a. — En la dudimensia spaco plana la fundamentan grandon undimensian estas: 1^{me} la *longo* (punktlongo), or nombro de punkton lokantan inter du punkton P k. P' de irg ni rekto; 2^{me} la *angulo* (regl-angulo), or nombro de region kushantan inter du irg nin region R k. R' .

Ulter tin undimensian grandon existas, en plano, un dudimensia grando, nomita *areo*, kiu estas la nombro de punkton lokantan intre de klozita kurvo C , or la nombro de region sekcantan ti kurvo, kar irg ni plana kurvo estas konceptibla, cor kom punktaro, cor kom reglaro (aro de la ye kurvo C tanjantan region).

2^b. — En la dudimensia spaco angula, or cirkerpunkta, la fundamentan grandon undimensian estas: 1^{me} la *reglangulo*, or nombro de region kushantan inter du region R k. R' de irg ni reglofasko; 2^{me} la *edrangulo*, or nombro de edron lokantan inter du irg nin edron E k. E' .

Ulter tin undimensian grandon existas un grando dudimensia, nome la *konusa solidangulo*, or simple *konusangulo*, kiu estas la limo, al kiu kuras la pluredrangulo, kiam la nombro de ties edron kreskas senfine. La konusangulo estas la nombro de region R kushantan intre de ni klotita konuso, or la nombro de edron E sekcantan ti konuso, kar konuso estas konceptibla, cor kom reglaro, cor kom edraro (formita da la tanjantan edron).

Konusangulon estas mezuratan per la areo, e kiu lu eltranchas el sfera surfaco kuncentre strekita per radiuslongo 1, kar la punkton lokantan sur ti areo estas evidente samnombran, ol la region kushantan intre de la konuso.

3. — En la tridimensia spaco la fundamentan grandon undimensian estas: 1^{me} la *longo* (punktlongo), or nombro de punkton lokantan inter du punkton P k. P' de irg ni rekto; 2^{me} la *angulo* (edrangulo), or nombro de edron situantan inter du irg nin edron E k. E' ; 3^{me} la *tordiva angulo* (reglangulo), or nombro de region kushantan inter du irg nin region R k. R' , or pli precize, inter du region R k. R' de irg ni orta konoido, kies axo estas la rekto I montrita sur figuro 6^{ma}.

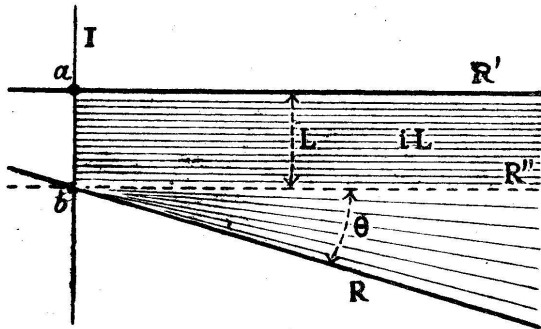


Fig. 6. — La tordiva reglangulo.

La tordiva angulo RR' estas *komplexa grando* (reglara), kar la dureglangulo RR' estas formata da la radiantan region kushantan en la planangulo RR'' ($= \vartheta$) kay da la paralelan region kushantan inter la region R'' k. R' . Se nu nomas L la pley kurta distanco ab de la region R k. R' , la valoro de la tordiva angulo RR' estos:

$$\lambda = \vartheta + iL,$$

en ki valoro la litero i signas la imaginara uno ($\sqrt{-1}$) uzata en algebro.

Kie en la kutima reprezento de komplexan qantiton, la pure kompleksa parto (iL) staras orde ye la reala parto ϑ , kar la plano $R''R'$ staras orde ye la plano RR'' ; kay la valoro de la kompleksa qantito ($\vartheta + iL$) estas sendipenda de la voyo seqita por migrigi la reglo de la pozicio R al la pozicio R' , kar ti qantito restas la sama, irg nia estu la formo de la orta konoido kuniganta la region R k. R' , kondite nur, ke la konoidaxo estu la komunortanto I .

Kar la du membron de la egaluro $\lambda = \vartheta + iL$ devas esti *homonenan* (or samspecan), kay kar la grandon λ k. ϑ omdu estas grandon reglaran, la grando iL ulsor devas esti reglara (efekte, ji konsistas el la paralelan region, kushantan inter R'' k. R'); alilatre la grando L estas punktara grando (pley kurta disto ab inter R k. R'); oni do konstatas, ke faktoro i transformas punktara grando en samvalora reglara grando, or, se oni preferas, faktoro i transformas punkto en reglo.¹

La nombro $n = iL : \vartheta$ estos nomata *picho* de la tordiva angulo RR' .

¹ Por pluan detalon koncerne reglaran grandon en spaco vidu artiklo aperinta en „Revue Scientifique“ (23^{ma} Septembra 1905), Parizo. — Ulsor, pri la korespondo inter reglara spaco k. punktara sferosurfaco imaginara, vidu artiklo titulita *Calcul géométrique réglé* en „The American Journal of Mathematics“ (1895), Baltimore, Md., U. S. A. En ti korespondo la imaginara uno i ne plu estas difinata per la egaluro $i^2 = -1$, sed per la egaluron $i \geq 0$ kay $i^2 = 0$, kie e tio montris Prof. C. Cailler, el la Geneva Universitato.

La dudimensian grandon en tridimensia spaco estas unme la *areo*, t. e. la nombro de punkton lokantan sur ni kurva surfaco intre de ni klozita kurvo C , strekita sur la surfaco, or la nombro de edron, kiun tuchas la surfaco en punkto intre de kurvo C . Areo estas do granda punktedrara.

La dua fundamenta granda dudimensia de la tridimensia spaco estas la *tordiva solidangulo* (reglara granda), or nombro de region entenatan en difinita parto de reglara biserio (kongruenco).

Nu konsideru, exemple, la kongruenco formata da omnin region, kiun e si apogas sur du irg nin kurvon, C k. C' (fig. 7). Oni savas, ke tin kurvon estas la *fokusan kurvon* de la kongruenco.¹ Por limigi difinita parto de la kongruenco, sufikas limigi difinita parto de la fokusan kurvon. Nu unme supozu, ke la fokusan kurvon estas du rekton A k. A' (fig. 8), kay nu marku sur tin rekton du segmenton mn ($= dL$) kay $m'n'$ ($= dL'$); la figuro $mn m'n'$ estas qaredro tia, ke omnin region R , e si apogantan sur la segmenton dL k. dL' , kushas intre de la qaredro. La region R formas tordiva solidangulo, kies fokusan segmenton estas mn k. $m'n'$. La valoro de ti solidangulo estas:

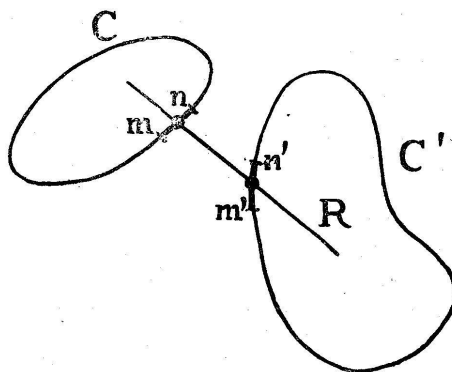


Fig. 7.

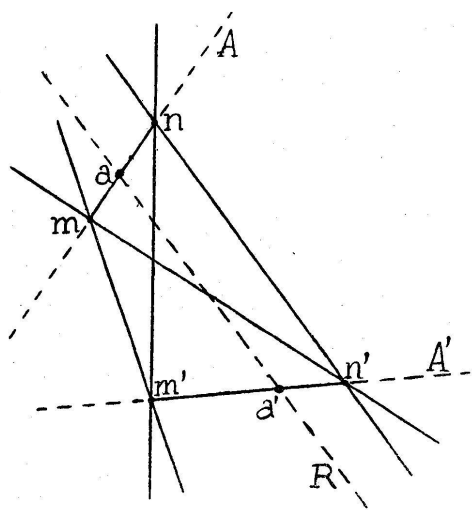


Fig. 8.

en ki formulo ω signas la angulo AR , ω' la angulo $A'R$, φ la edrangulo inter la planon AR k. $A'R$. Ti formulo estas nenio alia, ol la Gauss'a formulo, kun la sola difero, ke Gauss ne parolas pri tordivan solidangulon, sed nur pri

$$d\Sigma = \frac{dL dL'}{r^2} \sin \omega \sin \omega' \sin \varphi,$$

konusan solidangulon; efekte la tordiva angulo ($mn, m'n'$) estas egala ye la konusa angulo, naskita per un punkto m , kiu migras dey m til n kay regardas la segmento $m'n'$, or per fixa punkto m , kiu regardas segmento $m'n'$, migranta ye disto dL en direkto de mn .

Seqe, se P, Q , estas du irg nin punkton, markitan sur la fokusa kurvo C , kay P', Q' , du irg nin punkton, markitan sur la fokusa kurvo C' , la koresponda tordiva solidangulo de la kongruenco estos:

$$\Sigma = \int_P^Q \int_{P'}^{Q'} \frac{dL dL'}{r^2} \sin \omega \sin \omega' \sin \varphi,$$

¹ Mi elektis kongruenco posesanta fokusan kurvon, kar la kompreno estas pli facila en ti kazo, ol en la kazo de fokusan surfacon. Tamor, la aqerotan rezulton valoras ulsor por omnin kazon.

kay la sumita solidangulo de la kongruenco estos ricevata per integralado cirker la klozan kurvon C k. C' :

$$\Sigma = \int_C \int_{C'} \frac{dL dL'}{r^2} \sin \omega \sin \omega' \sin \varphi = 4 k \pi,$$

en kiu k signas la nombro de foyon, ye kiu kurvon C k. C' e su krucas, kie chenunon de cheno.

Ti formulo estas aplikibla al la teorio de elektromagnetismo por kalkuli la interago inter du elektran fluon C k. C' .

Fine, la fundamenta tridimensia granda en tridimensia spaco estas la *volumo*, t. e. la nombro de punkton lokantan intre de klozita surfaco S , or la nombro de edron sekcantan ti surfaco. Volumo estas do punktedrara granda.

REMARKO PRI LA SIMBOLO i . — Nu diris ci-sure, ke faktoro i ($= \sqrt{-1}$) transformas punkto P en reglo R ; alivorte la produto de i kay de irg ni punktlongo L estas homogena kun reglangulo ϑ , or λ . Simile, faktoro i transformas reglo R en edro E , alivorte la produto de i kay de irg ni reglangulo ϑ , or λ , estas homogena kun edrangulo l . Oni do havas:

$$(iL) = (\lambda) \quad \text{kay} \quad (i\lambda) = (l),$$

seqe:

$$(l) = (i\lambda) = (i^2 L) = (-L);$$

kay tio signifas, ke: *edrangulo* = *minus longo*,¹ or: *edro* = *minus punkto*. Exemple, se n estas la nombro, kiu mezuras la disto inter du punkton P k. P' , kay se (L) estas la longuno, la longo PP' (nombro de punkton lokantan inter P k. P') estos: $n(L)$; se oni strekas du region R k. R' , paralelan inter su ye disto PP' , la nombro de paralelan region kushantan inter R k. R' estos n (kar ti nombro estas la sama, ol la nombro de punkton inter P k. P'), sed la reglara granda formata da tin paralelan region ne plu estos $n(L)$, sed $n(iL)$; fine, se oni strekas du edron E k. E' , paralelan inter su ye sama disto PP' , la nombro de paralelan edron lokantan inter E k. E' ulsor estos n , sed la edrara granda formata da tin paralelan edron ne plu estos $n(L)$, sed $n(i^2 L)$, t. e.: $n(-L)$, slo la homogena vidpunkto.

Oni do ritruvas ci tiey la dusexeco de spaco, kar punkto aperas naw, kom plusa ($+1$), or vira, spacelemento, dur ke edro aperas, kom minusa (-1), or virina, spacelemento; fine, la reglo aperas kom hermafrodita elemento ($\pm i$), kar irg ni reglo estas konceptibla, kom rekto, cor punktara cor edrara.

¹ Oni ne mixu *minus longo* kun *longo minusa*.