

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DE LA TOUPIE GYROSCOPIQUE
Autor: Zack, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18022>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Remarquons d'ailleurs que la parabole semicubique $x^2 = y^3$ est une courbe de troisième ordre, toute située au-dessus de l'axe Ox , symétrique par rapport à Oy et dont l'origine est un point d'arrêt (voir fig. 2) ; on a de la sorte tous les éléments pour se former une idée de la forme qu'a la parabole cubique : cette courbe s'obtiendra en plaçant le plan $\xi\Omega\eta$ normalement au plan xOy de manière que Ω tombe en O et la droite $\Omega\xi$ se superpose à la parabole semicubique.

Un procédé parfaitement semblable peut s'appliquer à toute courbe gauche dont la projection orthogonale sur un plan convenablement choisi soit rectifiable par des fonctions simples.

Gênes, octobre 1917.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DE LA TOUPIE GYROSCOPIQUE

PAR

M. ZACK (Odessa).

Parmi les théories de la Mécanique, il y en a peu qui aient conduit à un plus grand nombre d'applications directes que la théorie du mouvement gyroscopique. En balistique, en aéronautique, dans la construction des machines et des navires il a été possible, grâce au développement de cette théorie, d'introduire des perfectionnements qui ont eu une influence quelquefois décisive sur l'évolution de ces diverses branches de l'art de l'ingénieur. Pourtant, la plupart des théories soi-disant élémentaires du phénomène gyroscopique sont ou fausses ou, au moins, inexactes. Quelques-unes seulement permettent d'obtenir des résultats purement qualitatifs.

Le but de cet article est de montrer qu'il est facile d'étudier *d'assez près* le mouvement d'une toupie gyroscopique par des méthodes élémentaires.

Les formules ainsi obtenues peuvent être directement appliquées aux différents cas qui se présentent avec une approximation dont le degré peut être rapidement déterminé dans chaque cas particulier.

Les résultats sont applicables surtout lorsque le mouvement de la toupie autour de son axe est entretenu, par exemple électriquement ou de toute autre manière, *indépendamment* du mouvement de l'axe lui-même, comme cela a lieu dans la plupart des applications.

§ 1. — Considérons un solide de révolution ou plutôt un solide dont l'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour de Oz. Soit *Oxyz* un système d'axes trirectangulaires mobile autour du point O, fixe dans l'espace. Supposons le solide en rotation autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire relative constante.

Soit ω la rotation instantanée absolue du système *Oxyz* au temps t et soient p, q, r les projections de ω sur les axes *Ox, Oy, Oz*.

Les équations d'Euler dans ce cas s'écriront

$$A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr = L ,$$

$$A \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M ,$$

$$C \frac{dr}{dt} = N , \quad \text{puisque } B = A .$$

On peut étudier le mouvement propre du système *Oxyz* en faisant abstraction du mouvement relatif du corps par rapport à *Oxyz*, c'est-à-dire en regardant le corps comme immobile autour de Oz, à condition d'introduire la force d'inertie relative et la force d'inertie complémentaire¹.

REMARQUE. — Si la vitesse angulaire relative du solide autour de Oz n'est pas constante dans le système *réel* d'en-

¹ V. M. ASTIER, *Etude sur le phénomène gyroscopique*. R. de M., 1909, 8.

traînement, on peut toujours imaginer un système *fictif* $Oxyz$ d'entraînement dans lequel la vitesse angulaire relative du solide serait constante.

En effet, supposons que la rotation relative du solide autour de Oz soit $\alpha = \beta + \gamma$ où β est constant et γ variable.

Soit r_1 la rotation d'entraînement *réel*; la rotation d'entraînement fictif sera $r = r_1 + \gamma$ et la rotation relative $-\beta$.

On peut immédiatement faire une application de cette remarque au calcul du couple autour de Oz des forces d'inertie provenant du mouvement varié relatif autour de Oz .

On aura

$$C \left(\frac{dr_1}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0 ,$$

puisque dans le mouvement absolu il n'y a pas de forces appliquées; d'autre part

$$C \frac{dr_1}{dt} = N_v ,$$

puisque nous considérons le solide comme immobile autour de Oz ¹ en introduisant le couple N_v des forces d'inertie.

De ces deux relations on tire

$$N_v = - C \frac{d\gamma}{dt} = - C \frac{d\alpha}{dt} .$$

Revenons aux équations d'Euler.

Soit M un point pris dans le corps et soient x, y, z ses coordonnées au temps t , dans le système $Oxyz$. Les projections de la vitesse relative sur les axes Ox, Oy, Oz sont

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y , \quad \frac{dy}{dt} = \alpha x , \quad \frac{dz}{dt} = 0 . \quad (2)$$

Soit m la masse du point M . Les projections de la force d'inertie complémentaire sur les axes Ox, Oy, Oz sont

$$-2m \left(q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right) , \quad -2m \left(r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt} \right) , \quad -2m \left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right) , \quad (3)$$

¹ Nous séparons toujours le mouvement *propre* du corps autour de Oz du mouvement provenant du système $Oxyz$; c'est ce premier mouvement qui est supposé nul.

ou, en remplaçant dx , dy , dz par leurs expressions (2),

$$\begin{aligned} & 2mr\alpha x \\ & 2mr\alpha y \\ & - 2mp\alpha x - 2mq\alpha y . \end{aligned} \quad (3')$$

Les projections sur les mêmes axes de la force d'inertie sont

$$m\alpha^2 x , \quad m\alpha^2 y , \quad 0 . \quad (4)$$

En faisant la somme des moments de ces forces d'inertie par rapport aux axes Ox , Oy et Oz et en remarquant que ces axes sont les axes principaux d'inertie, nous voyons que les moments des forces d'inertie relative ont des sommes nulles et que les sommes des moments des forces d'inertie complémentaires se réduisent respectivement à

$$- q\alpha C , \quad + p\alpha C , \quad 0 .$$

En ajoutant à L , M et N ces moments, nous pourrions écrire les équations d'Euler sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr &= L - q\alpha C , \\ A \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= M + p\alpha C , \\ C \frac{dr}{dt} &= N . \end{aligned} \quad (5)$$

Ces équations nous permettront d'étudier le mouvement du système $Oxyz$ autour de O en faisant abstraction de la rotation propre du corps.

§ 2. — Supposons d'abord que l'axe instantané d'entraînement est constamment situé sur un cône de révolution autour de Oz et de plus $N = 0$.

Des équations (5) on tire

$$C \frac{dr}{dt} = 0 , \quad \text{d'où} \quad r = r_0 .$$

L'axe d'entraînement fait avec Oz l'angle $\cos V = \frac{r_0}{\omega}$ et puisque le cône est de révolution $\frac{r_0}{\omega} = C^{te}$, c'est-à-dire $\omega = C^{te}$.

On peut donc écrire $p^2 + q^2 = C^{te}$. En différentiant cette expression nous obtenons (6) $p \frac{dp}{dt} + q \frac{dq}{dt} = 0$.

En multipliant la première des équations (5) par p et la seconde par q , en ajoutant et en tenant compte de (6), nous obtenons

$$Lp + Mq = 0. \quad (7)$$

Cette dernière relation conduit à la proposition suivante :

Si l'axe instantané d'entraînement est constamment situé sur un cône de révolution autour de Oz et est constant en grandeur¹, l'axe du couple des forces extérieures est perpendiculaire au plan passant par l'axe de rotation propre du corps et l'axe instantané d'entraînement.

Cette proposition a été énoncée pour la première fois, croyons-nous, par M. CLAUZEL², qui l'a démontrée par une méthode géométrique très élégante, sans préciser d'ailleurs les conditions de son application.

Supposons maintenant $Lp + Mq = 0$ et de plus $N = 0$.

En remplaçant L et M par leurs valeurs tirées des équations (5) et en faisant les réductions nécessaires, nous obtenons l'expression

$$p \frac{dp}{dt} + q \frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad p^2 + q^2 = C^{te}. \quad (6)$$

La troisième des équations (5) nous donne $r = r_0$. Nous arrivons ainsi à la proposition suivante :

Si l'axe du couple des forces extérieures est nul ou est constamment perpendiculaire au plan passant par l'axe de rotation propre du corps et l'axe instantané d'entraînement, l'axe instantané d'entraînement est situé sur un cône de révolution autour de Oz et est constant en grandeur.

Cette proposition peut être regardée comme l'inverse de la proposition de M. Clauzel.

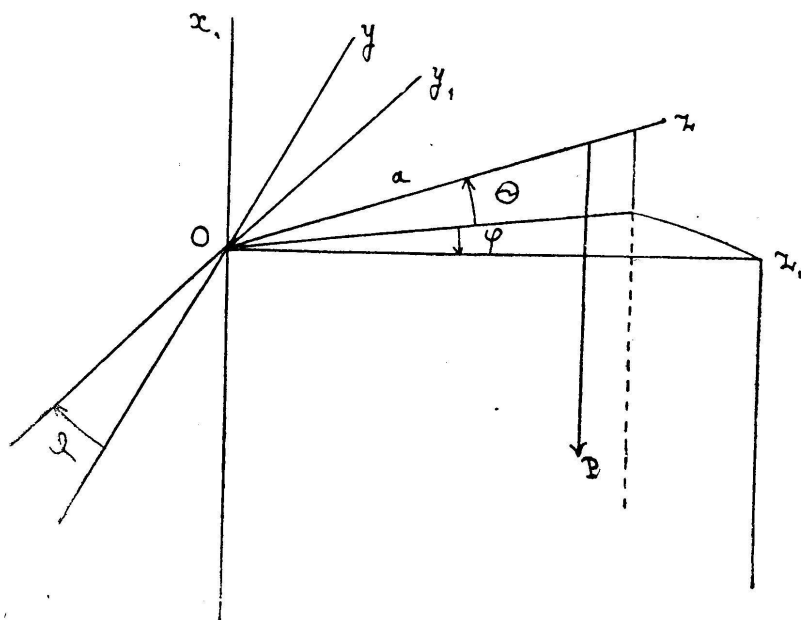
§ 3. — Nous étudierons deux cas particuliers du mouvement d'une toupie gyroscopique sous l'influence de la pesanteur. Une toupie gyroscopique est généralement constituée

¹ La seconde condition peut être remplacée par la condition $N = 0$, ce qui revient au même.

² G. CLAUZEL, *Effets gyroscopiques, etc.* R. d. M., 1912.

par un disque assez lourd monté sur un axe auquel on imprime un mouvement de rotation rapide et qui repose par un de ses points sur un support fixe. Les deux cas que nous analyserons seront: 1° le cas où l'axe de la toupie forme avec l'horizontale un angle voisin de $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire est presque vertical et 2° le cas où l'axe de la toupie forme avec l'horizontale un angle voisin de 0, c'est-à-dire est presque horizontal.

Nous introduirons les angles θ et φ qui déterminent la position de la toupie à chaque instant. L'angle θ détermine la position de l'axe Oz par rapport à l'horizontale et $\frac{d\theta}{dt}$ sera la vitesse angulaire de nutation; l'angle φ détermine l'azimuth de l'axe Oz et $\frac{d\varphi}{dt}$ sera la vitesse angulaire de précession. Ces deux angles définiront complètement la position de la toupie puisque nous la considérons (fictivement) comme immobile autour de son axe, à condition d'introduire les forces d'inertie.



Les seules forces réelles qui agissent sur la toupie sont la réaction au point O dont le moment est nul et le poids appliqué à une distance a de O et dont les projections sur les axes Ox , Oy et Oz sont

$$L = 0, \quad M = Pa \cos \theta, \quad N = 0.$$

Les projections de la rotation instantanée d'entraînement ω sur les axes Ox , Oy et Oz sont

$$p = \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta, \quad q = \frac{d\theta}{dt}, \quad r = \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta. \quad (8)$$

1° Supposons d'abord l'angle θ voisin de $\frac{\pi}{2}$ pendant tout le mouvement. L'expression $Lp + Mq$ se réduit ici à $Mq = -Pa \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$. Or, puisque θ est voisin de $\frac{\pi}{2}$, $\cos \theta$ est voisin de 0; d'autre part quand θ s'écarte le plus de $\frac{\pi}{2}$, $\frac{d\theta}{dt}$ est nul puisque θ est alors minimum ou maximum. Nous pouvons donc admettre que pendant tout le mouvement Mq est *approximativement* nul et appliquer les résultats du précédent paragraphe.

Nous pouvons écrire $p^2 + q^2 + r^2 = \omega_0^2$ avec $r = r_0$ où ω_0 et r_0 sont les valeurs initiales de la rotation instantanée d'entraînement et de sa projection sur Oz .

En remplaçant p , q et r par leurs valeurs en fonction de θ et φ nous obtenons

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega_0^2 \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta = r_0. \quad (9)$$

La dernière relation peut encore s'écrire

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r_0}{\sin \theta}. \quad (10)$$

On voit donc que la vitesse angulaire de précession $\frac{d\varphi}{dt}$ augmente quand $\sin \theta$ diminue, c'est-à-dire quand l'axe de la toupie s'écarte de la verticale.

Choisissons comme position initiale la position dans laquelle $\theta = \frac{\pi}{2}$, et comme instant initial le moment quand la vitesse angulaire autour de l'axe Oy est négative : $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 < 0$, θ ira en diminuant et $\frac{d\varphi}{dt}$ augmentera jusqu'au moment où $\frac{d\theta}{dt}$ dont la valeur absolue ira en même temps en diminuant (équation (9)) deviendra nul, à cet instant $\frac{d\varphi}{dt}$ sera égal à ω_0

et $\sin \theta_1$, sera égal à r_0 . Après cela θ augmentera de nouveau jusqu'à $\frac{\pi}{2}$ pendant que $\frac{d\varphi}{dt}$ diminuera jusqu'à r_0 , $\frac{d\theta}{dt}$ étant positif, θ continuera à augmenter jusqu'à une valeur $\sin \theta_2 = \frac{r_0}{\omega_0}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ augmentera jusqu'à ω_0 .

On voit ainsi que la vitesse angulaire de précession ne devient jamais nulle et oscille entre les valeurs r_0 et ω_0 , que l'angle θ varie entre deux valeurs symétriques par rapport à Oz définies par $\text{arc sin } \frac{r_0}{\omega_0}$ et que la vitesse angulaire de nutation varie entre 0 et $\pm \sqrt{\omega_0^2 - r_0^2}$. Du reste r_0 diffère peu de ω_0 puisque θ s'écarte peu de $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons supposé au début que $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule rapidement quand θ s'écarte de $\frac{\pi}{2}$. Cherchons les conditions pour qu'il en soit ainsi.

La deuxième des équations (5) prendra dans le cas qui nous occupe la forme suivante :

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} + (A - C)r_0^2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -Pa \cos \theta + C\alpha r_0 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (5')$$

Cette équation s'obtient en remplaçant p et q par leurs expressions (8), r par r_0 et $\frac{d\varphi}{dt}$ par son expression (10).

Multiplions cette équation par $\frac{d\theta}{dt}$ et intégrons.

On obtient :

$$\frac{A}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -Pa \sin \theta + C\alpha r_0 \text{Log sin } \theta + (C - A)r_0^2 \text{Log sin } \theta + D, \quad (11)$$

où D est déterminé par l'équation suivante :

$$\frac{A}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{\substack{t=0 \\ \theta=\frac{\pi}{2}}}^2 = -Pa + D, \quad \text{c'est-à-dire} \quad D = Pa + \frac{A}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0^2.$$

On obtient ainsi pour $\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$ l'expression suivante :

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2 \{ Pa(1 - \sin \theta) + [C\alpha r_0 + (C - A)r_0^2] \text{Log sin } \theta \}}{A} + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0^2. \quad (12)$$

L'équation (12) nous montre 1° que si α et r_0 sont nuls, $\frac{d\theta}{dt}$ ne s'annule jamais et augmente lorsque θ augmente ou diminue et 2° que plus α est grand¹ moins θ s'écarte de $\frac{\pi}{2}$, puisque $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule d'autant plus rapidement².

On voit donc que la supposition que nous avons faite au début est justifiée par un disque tournant *rapidement* autour de son axe. Cherchons maintenant la période d'oscillation de la toupie autour de l'axe vertical. On y arrive facilement en faisant quelques approximations.

L'équation (5') peut être écrite de la façon suivante :

$$\sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{(A - C)r_0^2 \cos \theta + Pa \cos \theta \sin \theta - C\alpha r_0 \cos \theta}{A} = 0. \quad (5'')$$

Puisque $\sin \theta$, pendant tout le mouvement, est voisin de 1, remplaçons $Pa \sin \theta$ par Pa et posons $\cos \theta = u$.

On aura

$$\begin{aligned} \cos \theta &= u, \\ -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} &= \frac{du}{dt}, \\ -\sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= \frac{d^2 u}{dt^2}. \end{aligned}$$

Remarquons que $\cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$, pendant tout le mouvement, est voisin de zéro, négligeons-le et écrivons

$$-\sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dt^2}.$$

L'équation (5'') deviendra alors

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + m^2 u = 0 \quad \text{où} \quad m^2 = \frac{C\alpha r_0 - Pa + (C - A)r_0^2}{A}; \quad (13)$$

la dernière expression pour α assez grand est positive.

L'équation (13) nous permet de calculer la période T d'une

¹ Nous ne parlons pas de r_0 puisque $(C - A)$ peut être négatif.

² Log $\sin \theta$ est nul ou négatif puisque $\sin \theta \leq 1$.

oscillation simple de la toupie autour de l'axe vertical. On trouve $T = \frac{2\pi}{m}$. On voit que T diminue 1° lorsque α augmente et 2° lorsque Pa diminue.

2° Passons maintenant à l'autre cas où θ est voisin de zéro.

Les équations (5) peuvent s'écrire en remplaçant p , q et r par leurs expressions (8) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \cos \theta - A r_0 \frac{d\theta}{dt} + (C - A) r_0 \frac{d\theta}{dt} &= - C \alpha \frac{d\theta}{dt} \\ A \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (A - C) r_0 \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta &= - Pa \cos \theta + C \alpha \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta \quad (14) \\ \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta &= r_0 \quad \text{puisque } N = 0 . \end{aligned}$$

Remarquons que r_0 est voisin de 0 puisque θ en diffère très peu. Pour la même raison nous pouvons, au lieu de $\cos \theta$, écrire 1 dans les équations (14), c'est-à-dire écrire

$$\begin{aligned} A \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + [C(\alpha + r_0) - 2Ar_0] \frac{d\theta}{dt} &= 0 , \\ A \frac{d^2 \theta}{dt^2} - [C(\alpha + r_0) - Ar_0] \frac{d\varphi}{dt} + Pa &= 0 . \end{aligned} \quad (14')$$

Posons

$$m^2 = \frac{C(\alpha + r_0) - 2Ar_0}{A} \quad \text{et} \quad n^2 = \frac{C(\alpha + r_0) - Ar_0}{A} ,$$

m^2 et n^2 sont positifs si α est supposé grand. Posons d'autre part $\frac{d\varphi}{dt} = u$. Les équations (14') s'écriront

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + m^2 \frac{d\theta}{dt} &= 0 , \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} - n^2 u + \frac{Pa}{A} &= 0 . \end{aligned} \quad (15)$$

De la première de ces équations nous pouvons tirer : $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{m^2} \frac{du}{dt}$; portons ceci dans la seconde équation, nous obtenons :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + m^2 n^2 u - m^2 \frac{Pa}{A} = 0 . \quad (16)$$

Posons

$$u = \frac{Pa}{An^2} + \frac{1}{m^2 n^2} A_0 e^{-\xi t}.$$

L'équation (16) pourra alors s'écrire

$$\frac{1}{m^2 n^2} \xi^2 A_0 e^{-\xi t} + A_0 e^{-\xi t} + m^2 \frac{Pa}{A} - m^2 \frac{Pa}{A} = 0, \quad (16')$$

d'où nous tirons

$$\xi^2 + m^2 n^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad \xi_1 = imn \quad \text{et} \quad \xi_2 = -imn.$$

Nous avons donc

$$u = \frac{Pa}{An^2} + A_1 \cos mnt + A_2 \sin mnt. \quad (17)$$

En nous servant des relations posées plus haut, nous obtenons successivement :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{m^2} \frac{du}{dt} = \frac{n}{m} A_1 \sin mnt - \frac{n}{m} A_2 \cos mnt,$$

$$\theta = -\frac{1}{m^2} A_1 \cos mnt - \frac{1}{m^2} A_2 \sin mnt + K',$$

$$\varphi = \frac{Pa}{An^2} t + \frac{1}{mn} A_1 \sin mnt - \frac{1}{mn} A_2 \cos mnt + K''.$$

En nous donnant les quatre valeurs initiales (pour $t = 0$) de θ , φ , $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$, soit θ_0 ¹, φ_0 , θ'_0 et u_0 , nous pourrions écrire quatre équations pour déterminer les quatre constantes A_1 , A_2 , K' et K'' .

Nous aurons

$$\begin{aligned} \theta_0 &= -\frac{1}{m^2} A_1 + K', & \theta'_0 &= -\frac{n}{m} A_2, \\ \varphi_0 &= -\frac{1}{mn} A_2 + K'', & u_0 &= \frac{Pa}{An^2} + A_1. \end{aligned} \quad (18)$$

On en tire

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{m}{n} \theta'_0, & A_1 &= u_0 - \frac{Pa}{An^2}, \\ K'' &= \varphi_0 - \frac{1}{n^2} \theta'_0, & K' &= \theta_0 + \frac{u_0}{m^2} - \frac{Pa}{Am^2 n^2}. \end{aligned} \quad (18')$$

¹ θ_0 doit être voisin de 0.

Considérons le cas particulier où $\varphi_0 = \theta_0 = u_0 = \theta'_0 = 0$.
On aura :

$$A_2 = 0, \quad K'' = 0, \quad A_1 = -\frac{Pa}{An^2}, \quad K' = -\frac{Pa}{An^2 m^2},$$

θ et φ s'écriront alors

$$\theta = \frac{Pa}{An^2 m^2} \cos mnt - \frac{Pa}{An^2 m^2} = -Pa(1 - \cos mnt),$$

$$\varphi = \frac{Pa}{An^2} t.$$

On voit que l'axe de la toupie décrit une cycloïde¹.

Remarquons encore que si α est très grand on peut négliger r_0 devant α et écrire $m^2 = n^2 = \frac{C\alpha}{A}$, θ et φ deviennent alors

$$\theta = -\frac{Pa}{Am^4} (1 - \cos m^2 t),$$

$$\varphi = \frac{Pa}{Am^4} (m^2 t - \sin m^2 t).$$

Plus α augmente, plus m augmente et plus la cycloïde s'aplatit et la période d'oscillation de l'axe de la toupie autour de l'horizontale $\frac{2\pi}{m^2}$ diminue.

Nous avons supposé au début que θ s'écarte peu de 0. Cherchons les conditions pour qu'il en soit ainsi. Il est évident qu'il faut d'abord que θ_0 soit ou nul ou très peu différent de zéro.

Ecrivons l'expression générale de θ . On aura

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{u_0}{m^2} \cos mnt + \frac{Pa}{An^2 m^2} \cos mnt + \frac{1}{mn} \sin mnt + \frac{u_0}{m^2} - \frac{Pa}{An^2 m^2} + \theta_0 \\ &= \left[\frac{u_0}{m^2} - \frac{Pa}{An^2 m^2} \right] [1 - \cos mnt] + \frac{1}{mn} \theta'_0 \sin mnt + \theta_0. \end{aligned}$$

On voit tout de suite que pour que θ s'écarte peu de θ_0 (qui lui-même est nul ou très petit), il faut que m et n soient très grands, c'est-à-dire α très grand.

§ 4. — Cherchons les conditions d'une précession simple

¹ Au lieu de θ et φ il faut considérer les coordonnées $-m\theta$ et $n\varphi$.

(sans nutation) et uniforme, c'est-à-dire les conditions pour que pendant tout le mouvement $\theta = \theta_0$ et $\frac{d\varphi}{dt} = u_0$ où θ_0 et u_0 sont déterminés par les conditions initiales.

La deuxième équation (14) pour $\theta = \theta_0$ prendra la forme

$$\cos \theta [Ar_0 - C(\alpha + r_0)] \frac{d\varphi}{dt} + Pa \cos \theta = 0 . \quad (19)$$

Cette équation admet comme première solution $\cos \theta = 0$ ou $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ prend alors la valeur constante $u_0 = r_0$.

L'axe de la toupie étant au début vertical, reste vertical et la toupie tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire constante $(\alpha + r_0)$. Nous avons vu plus haut que la toupie amenée dans une position légèrement différente de la verticale oscille autour de cette position si α est suffisamment grand. C'est donc une position stable.

Passons maintenant à la seconde solution. L'équation (19) peut être transcrite de la façon suivante

$$[Ar_0 - C(\alpha + r_0)] \frac{d\varphi}{dt} + Pa = 0 , \quad (19')$$

ou en remarquant que $r_0 = \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta$

$$[(A - C)u^2 \sin \theta = C\alpha u - Pa , \quad (19'')$$

où $\frac{d\varphi}{dt}$ a été remplacé par u . On obtient pour $\sin \theta$ l'expression suivante

$$\sin \theta = \frac{C\alpha u - Pa}{(A - C)u^2} . \quad (20)$$

Supposons pour plus de généralité que l'axe de la toupie est articulé sur son support. On aura alors les conditions suivantes $-1 \leq \sin \theta \leq 1$, ce qui revient à

$$-(A - C)u^2 \leq C\alpha u - Pa \leq (A - C)u^2 , \quad (21)$$

Supposons $A \neq C$. Les conditions (21) peuvent être écrites sous la forme d'inégalités suivantes :

$$(A - C)u^2 - C\alpha u + Pa \geq 0 , \quad (I)$$

$$(A - C)u^2 + C\alpha u - Pa \geq 0 . \quad (II)$$

Les racines de (I) égalé à zéro sont

$$u = \frac{C\alpha \pm \sqrt{C^2\alpha^2 - 4Pa(A - C)}}{2(A - C)}.$$

Les racines de (II) égalé à zéro sont

$$u = \frac{-C\alpha \pm \sqrt{C^2\alpha^2 + 4Pa(A - C)}}{2(A - C)}.$$

Nous ne considérerons que les cas où α est suffisamment grand pour que les racines ne soient pas imaginaires. Soit $A > C$ ¹. On voit tout de suite que les racines de (I) sont toutes deux positives, et puisque pour $u = 0$, (I) est positif, u doit être situé *en dehors* de l'intervalle des racines. De même, les racines de (II) sont l'une positive et l'autre négative, et puisque pour $u = 0$ (II) est négatif, u doit être situé *en dehors* de l'intervalle des racines. Il est facile de s'en convaincre graphiquement.

Soit maintenant $A < C$. On voit tout de suite que les racines de (I) sont l'une positive et l'autre négative, et puisque pour $u = 0$, (I) est positif, u doit être situé *dans* l'intervalle des racines. De même, les racines de (II) sont toutes deux positives, et puisque pour $u = 0$, (II) est négatif, u doit être situé *dans* l'intervalle des racines. Il est facile de s'en convaincre graphiquement.

On voit donc que pour qu'il y ait précession simple et uniforme dans les cas où $A \neq C$, u doit prendre une valeur satisfaisant aux conditions trouvées plus haut.

Soit encore $A = C$. L'équation (19'') s'écrit

$$C\alpha u - Pa = 0,$$

d'où

$$u = \frac{Pa}{C\alpha}. \quad (22)$$

On voit tout de suite que $\sin \theta$ peut prendre une valeur quelconque tandis que u est déterminé par (22).

§ 5. — Etudions maintenant la stabilité du mouvement de précession simple et uniforme. Ce mouvement est déterminé

¹ C'est ce qui arrive le plus souvent.

par θ_0 et u_0 , qui sont des constantes satisfaisant aux équations (14). Supposons qu'on amène l'axe de la toupie dans une position $\theta = \theta_0 + x$ et qu'on fasse varier sa vitesse de précession d'une quantité $\frac{dy}{dt}$, de sorte que $\frac{d\varphi}{dt} = u_0 + \frac{dy}{dt}$. Nous supposons que x et $\frac{dy}{dt}$ sont des infiniment petits. Cherchons s'ils sont des fonctions périodiques du temps. Si cela avait lieu, le mouvement serait évidemment stable.

En développant $\cos \theta$ et $\sin \theta$ suivant les puissances de x et en négligeant les infiniment petits du second ordre, on obtient :

$$\cos \theta = \cos \theta_0 - x \sin \theta_0 , \quad (23)$$

$$\sin \theta = \sin \theta_0 + x \cos \theta_0 . \quad (24)$$

D'autre part, puisque θ_0 et u_0 sont des constantes, on peut écrire :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dx}{dt} , \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} , \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} , \quad (25)$$

Remplaçons dans les équations (14) r_0 par $\frac{d\varphi}{dt} \sin \theta$ et portons ensuite dans les équations obtenues les valeurs (23), (24) et (25).

En négligeant les infiniment petits de second ordre et en remarquant que u_0 et θ_0 sont des solutions de ces équations, on obtiendra

$$\begin{aligned} A \frac{d^2y}{dt^2} \cos \theta_0 - A u_0 \sin \theta_0 \frac{dx}{dt} + (C - A) u_0 \sin \theta_0 \frac{dx}{dt} + C \alpha \frac{dx}{dt} &= 0 , \\ A \frac{d^2x}{dt^2} + (A - C) 2 u_0 \frac{dy}{dt} \sin \theta_0 \cos \theta_0 - P a x \sin \theta_0 - C \alpha \frac{dy}{dt} \cos \theta_0 & \quad (26) \\ + C \alpha u_0 x \sin \theta_0 &= 0 . \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$x = F \sin (\rho t + f) \quad \text{et} \quad y = G \cos (\rho t + f) .$$

On aura :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \rho F \cos (\rho t + f) , & \frac{d^2x}{dt^2} &= - \rho^2 F \sin (\rho t + f) \\ \frac{dy}{dt} &= - \rho G \sin (\rho t + f) , & \frac{d^2y}{dt^2} &= - \rho^2 G \cos (\rho t + f) . \end{aligned} \quad (27)$$

En portant ces expressions dans (26) et en divisant la première équation par $\cos(\rho t + f)$ et la seconde par $\sin(\rho t + f)$ on obtient

$$\begin{aligned} -A\rho^2 G \cos \theta_0 - Au_0 \sin \theta_0 \rho F + (C - A)u_0 \sin \theta_0 \rho F + C\alpha \rho F &= 0 \\ -A\rho^2 F - (A - C)2u_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \rho G - Pa \sin \theta_0 F & \\ + C\alpha \cos \theta_0 \rho G + C\alpha u_0 \sin \theta_0 F &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

De la première de ces équations on tire

$$F = G\rho \cos \theta_0 \frac{A}{C\alpha + (C - A)u_0 \sin \theta_0 - Au_0 \sin \theta_0}.$$

Portons cette expression de F dans la deuxième des équations de (28) et divisons par $G\rho \cos \theta_0$, nous aurons

$$\begin{aligned} A^2 \rho^2 + [C\alpha + (C - A)u_0 \sin \theta_0 - Au_0 \sin \theta_0][(A - C)2u_0 \sin \theta_0 - C\alpha] \\ + APa \sin \theta_0 - AC\alpha u_0 \sin \theta_0 &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \rho^2 = \frac{[(A - C)u_0 \sin \theta_0 + Au_0 \sin \theta_0 - C\alpha][(A - C)2u_0 \sin \theta_0 - C\alpha]}{A^2} \\ - \frac{Pa \sin \theta_0}{A} + \frac{C\alpha u_0 \sin \theta_0}{A}. \end{aligned} \quad (29)$$

Pour que ρ soit réel, c'est-à-dire ρ^2 positif, il faut que α soit suffisamment grand; x et $\frac{dy}{dt}$ seront alors périodiques et le mouvement u_0, θ_0 sera stable. Plus α est grand, plus ρ est grand aussi et plus la période de x et $\frac{dy}{dt}$ est petite, cette période étant égale à $\tau = \frac{2\pi}{\rho}$.

Si α est assez grand on peut écrire :

$$\rho^2 = \frac{C^2 \alpha^2}{A^2} + \frac{C\alpha u_0 \sin \theta_0}{A} - \frac{Pa \sin \theta_0}{A}.$$

Il y a intérêt à ce que Pa soit petit, le mouvement est alors plus stable, τ étant plus petit.

Pour $\theta_0 = 0$, (29) devient $\rho^2 = \frac{C^2 \alpha^2}{A^2}$ et on retrouve le résultat du § 3. En effet, la période est définie pour $\theta_0 = 0$ par $\tau = \frac{2\pi}{\rho}$ où $\rho = \frac{C\alpha}{A}$ et dans le § 3 par $\tau = \frac{2\pi}{mn}$, ce que pour $\theta_0 = 0$ devient $\frac{2\pi}{mn}$ où $mn = \frac{C\alpha}{A}$ puisque $r_0 = 0$.