Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Société mathématique suisse. Lugano, 8 septembre 1919.

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

La distance des deux points focaux de chaque rayon de la congruence est

$$a \operatorname{ch} \omega - c \cos \varphi = \frac{a}{c} x_2 - \frac{c}{a} x_1 \; ;$$

cette distance est donc une fonction rationnelle des coordonnées de ces points focaux.

Si, d'autre part, λ représente la distance comptée à partir de l'un des points focaux, le point de l'ellipse (E) par exemple, jusqu'à l'une des cyclides orthogonales aux droites de la congruence, cette distance λ est égale à

$$\lambda = - c \cos \varphi + \text{const} = - \frac{c}{a} x_1 + \text{const} \; ;$$

elle est donc une fonction rationnelle des coordonnées de l'un ou l'autre des deux points focaux.

CHRONIQUE

Société mathématique suisse.

Lugano, 8 septembre 1919.

La Société mathématique suisse a tenu sa neuvième réunion ordinaire à Lugano, le 8 septembre 1919, sous la présidence de M. le Prof. Michel Plancherel (Fribourg), à l'occasion de la centième assemblée annuelle de la Société helvétique des sciences naturelles. Le programme de la partie scientifique comprenait onze communications ; en voici les résumés :

1. — Dr Ed. Guillaume (Berne). — *Un nouvel algorithme : les « dérivées homogènes » et une nouvelle opération spatiale : l'« aberration »*. — La Théorie de la Relativité restreinte (c'est-à-dire sans champ de gravitation), qui a été l'objet d'innombrables travaux, n'avait pas donné naissance jusqu'ici à la création d'êtres mathématiques nouveaux, malgré la haute originalité des conceptions sur lesquelles elle repose, et contrairement aux traditions de la Physique, qui a toujours été l'inspiratrice de la Mathématique.

Il faut en chercher la raison dans le fait que la Théorie faisait intervenir la notion fondamentale de *temps* d'une façon fort étrange, déconcertant complètement l'intuition. Nous avons

montré ailleurs[1] qu'il était possible d'introduire un paramètre unique t pour représenter le temps dans la Théorie de la Relativité. Voici, très brièvement, les résultats auxquels on parvient, résultats qui introduisent des notions mathématiques nouvelles :

Dans la Théorie de la Relativité, on rapporte tous les déplacements à des systèmes de référence qui sont des trirectangles euclidiens S (x, y, z). Mais un changement de système se fait à l'aide de la *transformation de Lorentz* qui contient, outre les 3 coordonnées habituelles x, y, z de tout point P, un certain paramètre u. Pour deux systèmes S_1 et S_2, animés d'une certaine translation relative, que nous préciserons plus loin, cette transformation est la suivante :

$$x_1 = \beta(x_2 + \alpha u_2) \; ; \quad y_1 = y_2 \; ; \quad z_1 = z_2 \; ; \quad u_1 = \beta(u_2 + \alpha x_2) \qquad (1)$$

où $\beta^2 = 1 : (1 - \alpha^2)$ est une constante. Or, les 4 quantités x, y, z, u ne peuvent être considérées comme les coordonnées homogènes d'un point P ; nous voulons dire que si on leur attribuait arbitrairement cette signification, on ne serait nullement conduit aux résultats de la Théorie de la Relativité. Si, par contre, on considère ces quantités comme des fonctions du temps t, on tombe immédiatement sur la célèbre règle d'addition des vitesses d'Einstein, qui est à la base de la Théorie, en formant les quotients :

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{u}_1}, \quad \frac{\dot{y}_1}{\dot{u}_1}, \quad \frac{\dot{z}_1}{\dot{u}_1} \; ; \qquad \frac{\dot{x}_2}{\dot{u}_2}, \quad \frac{\dot{y}_2}{\dot{u}_2}, \quad \frac{\dot{z}_2}{\dot{u}_2},$$

où les dérivées par rapport à t : $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ sont les composantes des vitesses de P. La dérivée $\dot{u}$ est alors le scalaire d'une vitesse caractéristique de S, qui n'est autre que la vitesse de la lumière dans ce système. Nous nous trouvons donc en présence d'un nouvel algorithme qu'on peut appeler « vitesses » ou « dérivées *homogènes* ».

Pour en voir la signification spatiale, nous nous placerons dans le cas très simple où les deux systèmes S_1 et S_2 se réduisent aux axes $O_1 x_1$ et $O_2 x_2$, glissant l'un contre l'autre avec la vitesse α ; P est un point en mouvement sur ces axes, et nous le supposerons — ce qu'on peut toujours faire — lié à un troisième axe $O_3 x_3$ glissant également relativement aux premiers. On a alors, puisque $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$:

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{u}_1} = \frac{\dfrac{\dot{x}_2}{\dot{u}_2} + \alpha}{1 + \alpha \dfrac{\dot{x}_2}{\dot{u}_2}},$$

[1] Voir *Archives des sciences phys. et nat.*, Genève, décembre 1918 et juin 1919.

expression qui ne dépend plus que des rapports $\frac{\dot{x}}{\dot{u}}$, ce qui nous permet, en changeant d'échelle, de les prendre pour vitesses. Posons :

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{u}_1} = v_{13} \; ; \qquad \frac{\dot{x}_2}{\dot{u}_2} = v_{23} \; ; \qquad \alpha = v_{12} \; ,$$

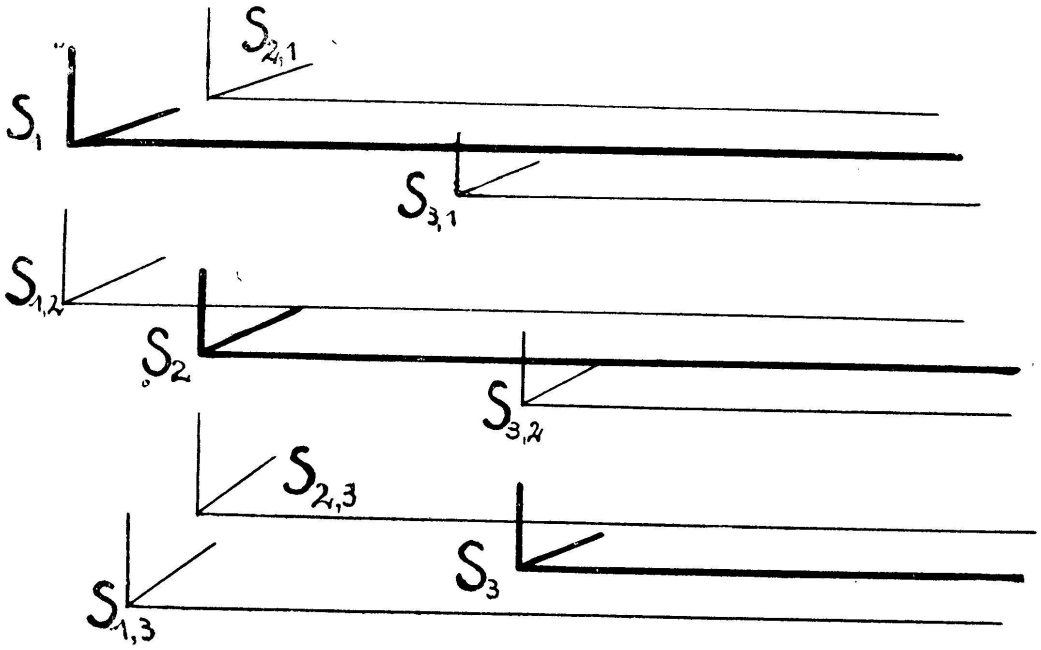
nous obtenons :

$$v_{13} = \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + v_{12} v_{23}} \, . \tag{2}$$

Comparons cette expression à celle que donne la Cinématique classique pour 3 droites glissant les unes par rapport aux autres avec des vitesses relatives V_{12}, V_{23}, V_{13} :

$$V_{13} = V_{12} + V_{23} \, .$$

Tandis que cette dernière relation conduit, à tout instant t, à une configuration *unique* pour l'ensemble des trois droites, la relation (2) donne, à chaque valeur de t, trois figures *distinctes* selon le système où l'on se place pour envisager les deux autres. Si, par exemple, on se met sur S_1, S_2 et S_3 sembleront avoir les positions *apparentes* $S_{2,1}$ et $S_{3,1}$ (voir la figure). Nous dirons qu'il y a « *aberration* ». Cette désignation se justifie par le fait que l'expression (2) contient en particulier l'aberration astronomique.



La Théorie ne faisant connaître que les positions apparentes, on se demandera quelles sont les positions *vraies*. Dans toutes les Géométries, euclidiennes ou non-euclidiennes, la composition des vecteurs s'effectue suivant un polygone *fermé*. La règle (2),

par contre, conduit à une figure *ouverte*, ce qui produit l'« aberration ». Pour connaître les vitesses vraies, il faudrait trouver des fonctions des vitesses apparentes, qui s'additionnent suivant une figure fermée. Il y a deux possibilités : 1° privilégier un système et lui attribuer le repos absolu ; 2° prendre pour vitesses vraies les arguments des tangentes hyperboliques représentant les vitesses apparentes. Les trajectoires vraies seraient alors les géodésiques de surfaces à courbure négative. La vitesse vraie de la lumière aurait une valeur limite infinie.

En terminant, disons que l'introduction d'un paramètre unique t pour représenter le temps dans la Théorie de la Relativité, permet d'éliminer immédiatement la célèbre « contraction » de Lorentz, qui apparaît ainsi comme une entité purement fictive.

2. — Dr Giov. Ferri (Lugano). — *Sur la courbe des points brillants de sphères concentriques.* — Soit A le point lumineux, A_1 le point de vue, O le centre des sphères, M un point brillant (par réflexion), situé dans le plan AA_1O. Prenons un système d'axes rectangulaires, O comme origine et l'axe Ox passant par le milieu de AA_1. Soient alors $p, q ; p_1, -q ; x, y$ les coordonnées respectives de A, A_1 et M. Les coefficients angulaires des droites AM, A_1M et OM sont alors respectivement $a = \frac{y-q}{x-p}$, $a_1 = \frac{y+q}{x-p_1}$, $\frac{y}{x}$. Le coefficient angulaire de la bissectrice de l'angle AMA_1 égalé à celui de OM donne

$$\frac{a\sqrt{1+a_1^2} - a_1\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a_1^2} - \sqrt{1+a^2}} = \frac{y}{x} .$$

Remplaçons a et a_1 par leurs valeurs, nous obtenons pour le lieu des points de réflexion sur les sphères de centre O

$$(p+p_1)(x^2+y^2)y - (p-p_1)(x^2-y^2)q - 2(q^2+pp_1)xy = 0 . \quad (1)$$

Ce lieu passe par A et par A_1, il a un point double en O. Il y a pour toute valeur de x 3 valeurs de y ; l'une d'elles est toujours réelle et positive. Pour $x = \pm\infty$, on a asymptotiquement $y = \frac{p-p_1}{p+p_1}q$ parallèle à Ox. Pour toute valeur de y il y a deux valeurs de x qui ne sont réelles que lorsque $|y| \leq \frac{\sqrt{(p^2+q^2)(p_1^2+q^2)}}{p+p_1}$.

Lorsque A et A_1 sont équidistants de O, $p = p_1$ et l'équation se réduit à

$$[p(x^2+y^2) - (p^2+q^2)x]y = 0 .$$

Le lieu est alors formé de l'axe des x et de la circonférence $x^2 + y^2 - \frac{p_2+q_2}{p}x = 0$ dont le centre est sur l'axe des x et qui

passe par O. Quand A est à l'infini : $p = \infty$, l'équation du lieu se réduit à $(y - q)\, x^2 - 2p_1 xy + (q + y)\, y^2 = 0$, qui a $y = q$ comme asymptote.

La *construction graphique de la courbe* peut se faire point par point au moyen des tangentes menées par A et A_1 aux circonférences de centre O. On obtient pour chaque circonférence deux couples de tangentes ayant 4 points d'intersection qui sont des points de la courbe.

Les *points brillants d'une sphère* s'obtiennent par l'intersection du lieu des points brillants avec le grand cercle situé dans le plan AA_1 O, donc par résolution du système simultané formé par (1) et par $x^2 + y^2 = r^2$. On obtient pour déterminer x et y deux équations du 4e degré, par conséquent 4 points qui peuvent être tous réels ou dont 2 peuvent être imaginaires. Notons cependant que dans chaque cas deux points seulement sont des points de réflexion de rayons physiques, l'un sur la partie convexe, l'autre sur la partie concave de la sphère. Les 2 autres points répondent seulement à la condition géométrique de la bisection de l'angle supplémentaire des 2 droites passant par A et A_1.

3. — Dr K. Merz (Coire). — *Métrique dans les ovales des courbes algébriques.* — Considérons l'intérieur d'un ovale comme l'image du plan illimité dans une transformation quadratique. Admettons dans ce plan la métrique euclidienne et faisons correspondre aux segments et aux angles de ce plan leurs images dans l'ovale en les affectant des mêmes nombres comme mesure. Nous définissons de cette manière à l'intérieur de l'ovale une métrique générale non euclidienne, ayant sa réalisation dans le plan.

1er exemple[1]. $f \equiv (x^2 - a^2)(x - b) - y^2 = 0$ possède lorsque $a < b$ un ovale compris dans $-a \leqq x \leqq +a$. La transformation $\xi^2 = \frac{x^2}{f}$, $\eta^2 = \frac{y^2}{f}$ fait correspondre aux points $P(x, y)$ de l'intérieur de l'ovale les points $P'(\xi, \eta)$ du plan illimité. Aux coordonnées x, y de P envisagées comme distances aux axes correspondent dans le plan (ξ, η) un arc u d'une courbe du 3me ordre et un arc d'hyperbole v donnés par

$$u = \int \sqrt{\frac{4f(f - xf_1) + (x^2 + y^2) f_1^2}{4f^3}}\, dx\,,$$

$$v = \int \sqrt{\frac{4f(f - yf_2) + (x^2 + y^2) f_2^2}{4f^3}}\, dy\,,$$

[1] Voir l'exemple des *Verhandlungen d. Schweiz. Naturforsch. Gesell.*, 1917, II, p. 135

où $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$. L'élément d'arc est donné par $ds^2 = du^2 + dv^2 - 2du\,dv \cos\varphi$ et $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2f[2f - xf_1 - yf_2]}{2f[xf_2 + yf_1] - (x^2 + y^2) f_1 f_2}$. Les géodésiques à l'intérieur de l'ovale sont des arcs de courbes du 3me ordre.

2me *exemple.* $f \equiv (x^2 - a^2)(x^2 - b^2) - y^2 = 0$; $a < b$. On ne considère que les valeurs de x, y qui sont à l'intérieur de l'ovale $-a < x < +a$. On obtient

$$u = \int \sqrt{\frac{(a^2 b^2 - x^4 - y^2)^2 + x^2 y^2 (2x^2 - a^2 - b^2)^2}{[(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) - y^2]^3}}\, dx\,,$$

$$v = \int \sqrt{\frac{x^2 y^2 + (x^2 - a^2)^2 (x^2 - b^2)^2}{[(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) - y^2]^3}}\, dy\,.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{[(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) - y^2](a^2 b^2 - x^4)}{xy[x^4 + y^2 - a^2 b^2 + (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(2x^2 - a^2 - b^2)]}\,.$$

Les géodésiques de l'ovale sont ici les arcs de courbes du 4me ordre, images des droites $\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$. La distance dans l'ovale se détermine par des arcs de courbes du 4me ordre.

4. — Prof. Dr W.-H. Young, F. R. S. (Lausanne et Aberytstwyth). — *Sur la notion de l'aire.* — Plusieurs mathématiciens de notre temps ont essayé de préciser la notion de l'aire d'une surface courbe, mais avec peu de succès. L'auteur a construit une théorie qui s'applique, non seulement aux surfaces, mais aux variétés de n'importe quelles dimensions. La théorie est fondée sur l'idée de l'*aire d'une courbe gauche.* L'aire d'un polygone est la somme des moments de forces, représentées par les côtés du polygone. Inscrivons dans une courbe un polygone ayant tous ses côtés inférieurs en longueur à δ : si, en faisant tendre δ vers zéro, l'aire du polygone tend vers une limite unique, celle-ci est l'*aire de la courbe.* Avec cette définition, par exemple, chaque courbe rectifiable plane possède une aire donnée par la formule

$$A = \frac{1}{2} \int \{ x(u)\, dy(u) - y(u)\, dx(u) \}\,.$$

Si la courbe est l'image du périmètre du rectangle $(a, b; a', b')$ dans une correspondance continue

$$x = x(u, v)\,, \quad y = z(u, v)\,, \quad (a \leq x \leq a')\,, \quad b \leq y \leq b')\,.$$

le problème se pose de transformer l'expression obtenue dans l'intégrale double bien connue

$$A = \int_a^{a'} \int_b^{b'} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv\,.$$

Prenons maintenant une correspondance continue et biunivoque

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

et divisons le rectangle fondamental en rectangles partiels, dont les côtés, parallèles à $u = 0$, $v = 0$, ne dépassent pas δ en longueur. Ayant formé la somme Σ_δ des aires des courbes images de ces rectangles partiels, nous faisons tendre δ vers zéro. Si Σ_δ a une limite unique Σ, celle-ci est l'aire de la partie de la surface, image biunivoque du rectangle fondamental. Le théorème principal est le suivant : *Si* x(u, v), y(u, v), z(u, v) *sont des intégrales par rapport à* u, *ayant des dérivées partielles par rapport à* u, *qui sont, sauf pour un ensemble de valeurs de* u *de mesure nulle, toutes inférieures à une fonction sommable de* u, *et si la même chose est vraie quand nous changeons* u *en* v, *et* v *en* u, *la surface image du rectangle fondamental a une aire* A *donnée par la formule*

$$A = \int_a^{a'} \int_b^{b'} \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} \, du \, dv,$$

Sous certaines conditions l'auteur arrive au même but par une méthode de triangulation. Il faut cependant introduire explicitement l'ordre double de la surface, de même que, dans l'approximation de la longueur d'une courbe, il est nécessaire de tenir compte du sens de cette courbe. La triangulation est obtenue en joignant convenablement par des lignes droites les points de la surface, images des sommets des rectangles partiels de longueur $\leqq h$ et de hauteur $\leqq k$ dans le plan des (u, v). Pour calculer l'aire nous laissons d'abord k et puis h tendre vers zéro, et nous obtiendrons le résultat voulu dans certains cas intéressants. Sans donner les conditions les plus générales, nous remarquons que, si $x(u, v)$, $y(u, v)$ et $z(u, v)$ sont des intégrales doubles, cette méthode est valable, d'autant plus que la limite obtenue est dans ce cas indépendante de la manière avec laquelle k et h tendent vers zéro.

5. — Prof. Dr L.-Gustave Du Pasquier (Neuchâtel). — *Sur un problème de cinématique.* — Une barre rigide AB de longueur l_1 peut tourner librement, avec la vitesse v_1, autour de son extrémité A supposée fixe. Une seconde barre BC également rigide, mais de longueur $l_2 \neq l_1$, peut tourner, avec la vitesse v_2, librement autour de l'extrémité B de la première. Dans ces circonstances, le point C, extrémité libre de la seconde barre, décrit une « courbe *gp* » dont la forme et les propriétés dépendent :

1° des longueurs l_1 et l_2 ;

2° du rapport des vitesses v_1 et v_2 ;

3° du sens des rotations autour de A et de B, en particulier (lorsqu'elles s'effectuent dans un même plan), si elles ont lieu dans le même sens, ou non.

Il est remarquable que ces mêmes courbes *gp* puissent être engendrées cinématiquement d'une manière simple par les dispositifs suivants : Un point mobile P est animé d'un mouvement donné sur un segment XY d'une droite *d*. En même temps, *d* tourne autour de l'un de ses points, F, supposé fixe en dehors du dit segment. La trajectoire du mobile P est encore une courbe *gp*. — Un point mobile P parcourt une certaine ellipse, avec la vitesse v_1 (mouvement de circulation) ; simultanément, cette ellipse tourne avec la vitesse v_2 autour d'un pôle fixe, F, qui coïncide à chaque instant avec l'un de ses foyers. La trajectoire *s* qui résulte pour P de la combinaison de ce mouvement de rotation avec celui de circulation est de nouveau une courbe *gp*. — Le conférencier déduit les équations de ces courbes dans le cas où elles sont planes, en coordonnées cartésiennes et polaires, puis en énumère une série de propriétés et indique une généralisation du problème à l'espace.

La communication se termine par d'intéressantes applications des courbes *gp* à quelques mécanismes, à l'astronomie et à la mécanique de la relativité.

6. — Prof. Dr A. Speiser (Zurich). — *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes.* — Considérons les lignes géodésiques d'une surface convexe fermée, issues d'un point $\mathfrak{P}$, à partir de $\mathfrak{P}$ jusqu'au premier foyer. Elles engendrent une surface recouvrant la surface convexe partout au moins une fois. La continuation de ces lignes à partir du premier foyer jusqu'au deuxième engendre de nouveau une surface de recouvrement qui, quand certaines conditions sont remplies, couvre toute la surface convexe. Par chaque point $\mathfrak{P}$ il passe donc au moins une géodésique qui, après avoir touché l'enveloppe une seule fois rentre au point $\mathfrak{P}$. On démontre que la plus courte est une géodésique fermée, ce qui donne une démonstration nouvelle d'un théorème de Poincaré (*American transactions*, t. 6, p. 237), à savoir que sur chaque surface convexe fermée il existe au moins une géodésique fermée.

7. — Prof. Dr M. Plancherel (Fribourg). — *Sur la méthode d'intégration de Rayleigh-Ritz.* — Le procédé de Rayleigh-Ritz (Rayleigh : Phil. Mag. (5), 47 (1899), p. 566-72 et (6), 22 (1911), p. 225-229 ; Ritz : Gött. Nachr., 1908, p. 236-40. J. reine angew. Math., 135 (1908), p. 1-61. Ann. d. Phys. (4), 28 (1909), p. 737-786.

Œuvres, p. 192-316) pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique qui résultent d'un problème du calcul des variations (prenons pour fixer les idées l'équation $\Delta\Delta u - \lambda u = 0$) exprime la solution sous forme d'une série $u = \Sigma x_i \varphi_i$ procédant suivant un système de fonctions données φ_i que nous supposerons orthogonal, fermé et normé et calcule les coefficients x_i comme solutions, au sens de la méthode des réduites, d'un système

$$\sum_k a_{ik} x_k - \lambda x_i = f_i \tag{1}$$

d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. La méthode de Ritz ne démontre la légitimité du procédé que dans le cas où $\lambda \leqq 0$. En supposant connues l'existence et les propriétés des fonctions fondamentales de $\Delta\Delta u - \lambda u = 0$, il est cependant possible de prouver que le procédé de Ritz est applicable pour toute valeur de λ qui n'est pas une valeur fondamentale et qu'il permet de calculer valeurs et fonctions fondamentales par la résolution, au sens de la méthode des réduites, du système homogène correspondant à (1). La démonstration se base sur l'étude de la forme quadratique (non bornée) $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ et sur le fait que cette forme possède cependant une résolvante unique $K(\mu; x)$ qui, elle, est une forme bornée sauf pour les valeurs de μ qui sont les inverses des valeurs fondamentales. Ainsi se trouve justifiée l'application qu'a faite Ritz de son procédé au calcul des vibrations fondamentales d'une plaque élastique à bords libres (figures de Chladni).

8. — Dr G. Pólya (Zurich). — *Quelques problèmes de probabilité se rapportant à la « promenade au hasard »*. — Imaginons un réseau régulier de points dans l'espace à d dimensions ; relions tous ces points (nœuds) par des droites parallèles aux axes de coordonnées. Un promeneur errant sur les droites de ce réseau se décide au hasard, en chaque nœud, pour une des $2d$ directions possibles, le choix de chaque direction ayant la probabilité $\frac{1}{2d}$. Pour $d = 1$, nous avons simplement une droite indéfinie divisée en segments égaux et le problème est une représentation géométrique du jeu de « pile ou face ». Pour $d = 2$, le problème représente la promenade au hasard d'un piéton dans un réseau de rues et pour $d = 3$ le chemin d'une molécule d'un gaz en diffusion à travers un cristal du système régulier.

Les applications principales du calcul des probabilités peuvent être rattachées au schéma de la promenade au hasard ou à des modifications de ce schéma, qui s'introduisent d'elles-mêmes. Des problèmes nouveaux et curieux se rapportant à la promenade

au hasard, nous ne citerons ici qu'un seul. Deux promeneurs errant dans le réseau, partant d'un même nœud, allant toujours avec la même vitesse, prennent leurs décisions aléatoires à chaque nœud, indépendamment l'un de l'autre. La probabilité pour qu'ils se rencontrent pendant une durée t déterminée croît avec t. Cette probabilité tend-elle vers l'unité lorsque t tend vers l'infini? *Oui*, si $d = 1, 2$; *non*, si $d = 3, 4, 5, \ldots$.

9. — Prof. Dr R. Fueter (Zurich) — *Sur quelques théorèmes de la théorie des idéaux et sur leur démonstration.* — Soit K un corps de Galois quelconque. Hilbert à étudié la décomposition dans K de chaque nombre premier en idéaux premiers. On peut compléter ses recherches en considérant l'ensemble des nombres premiers au lieu de les considérer isolément. En effet, K est cyclique relativement au corps de décomposition des nombres premiers qui n'ont pas de diviseur commun avec son discriminant; on peut, par suite, utiliser la théorie que j'ai donnée des équations abéliennes dans un domaine fondamental. Les résultats suivants entrent en considération. Soit k un corps fondamental, K le corps supérieur cyclique relatif; soit f un idéal de k contenant tout idéal premier du discriminant relatif de K par rapport à k, à la première puissance quand il est premier avec le degré relatif, à une certaine puissance lorsqu'il est contenu dans le degré relatif. Formons le rayon de k ayant f comme guide. On a alors les théorèmes :

I. *Tous les idéaux premiers d'une classe de rayons* (*mod.* f) *de* k *se décomposent de la même manière dans* K. Deux idéaux de k sont dits équivalents (mod. f) lorsque leur quotient, multiplié convenablement par des unités de k, est égal à un nombre α *totalement positif* et vérifiant la congruence $\alpha \equiv 1$ (mod. f).

II. *Tous les idéaux de la classe principale de rayons* (*mod.* f) *de* k *se décomposent dans* K *en un nombre d'idéaux premiers égal au degré relatif.*

Considérons tous les nombres premiers du corps de Galois donné K et formons avec eux, comme plus haut, le guide f. Le corps d'inertie de tous les idéaux premiers non contenus dans f est encore le corps K. Ce dernier est cyclique de degré n relativement au corps de décomposition d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ (c'est-à-dire sa norme est p^n). Soit $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ le groupe (relatif) de décomposition. Parmi les conséquences des théorèmes I et II je noterai les suivantes :

Le groupe de décomposition $1, z, z^2, \ldots z^{n-1}$ est un sous-groupe du groupe de décomposition de tout idéal premier du corps de décomposition, lorsque cet idéal est équivalent (mod. f) dans ce corps à l'idéal premier $\mathfrak{p}$. Si $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ n'est pas sous-

groupe d'un sous-groupe cyclique du groupe de Galois, tous les idéaux premiers du corps de décomposition, qui sont équivalents à $\mathfrak{p}$ (mod. f), ont ce corps comme corps de décomposition. Si $n > 1$, $\mathfrak{p}$ n'est jamais un idéal principal (mod. f) dans le corps de décomposition.

Si donc, inversement, on prend un sous-groupe quelconque $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ du groupe de Galois du corps, et si ce sous-groupe est « le plus grand », c'est-à-dire s'il n'est pas sous-groupe d'un autre sous-groupe cyclique, formons le sous-corps k appartenant à $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$; alors, tous les idéaux premiers de k qui ne sont pas du premier degré se décomposent dans K en n idéaux premiers. *Tous les idéaux premiers de la même classe de rayons* (*mod.* f) *de k ont le même corps de décomposition.*

Les démonstrations des théorèmes I et II n'ont, jusqu'à présent, pas été entièrement publiées. Trois méthodes peuvent conduire au but : celle de Furtwängler basée sur les lois de réciprocité, ma méthode des classes de rayons et de la répartition en genres, enfin la méthode analytique de Hecke basée sur son équation fonctionnelle.

10. — Dr S. Bays (Fribourg). — *Une question de Cayley relative au problème des triples de Steiner*[1]. — Cayley a soulevé, relativement au problème des *triples* ou *triades* de Steiner, une question intéressante et difficile, jusqu'ici neuve encore de toute recherche : *Est-il possible de répartir les* $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$ *triples de* N *éléments en* N — 2 *systèmes de Steiner ?*

Pour 7 éléments, cette répartition n'est pas possible ; on peut écrire deux systèmes de Steiner de 7 éléments, n'ayant pas de triples communs, mais pas davantage. Cayley s'est demandé si par exemple les 455 triples de 15 éléments pourraient être disposés en 13 systèmes de Steiner. Il a cru donner une démonstration très simple que, si les 13 systèmes existent (et Cayley dit en terminant qu'il ne le pense pas), ils ne peuvent pas se déduire de l'un d'entre eux par une permutation cyclique de 13 de ces éléments. Mais sa démonstration repose sur une prétention qui se trouve être entièrement fausse. Cayley prétend que dans le rectangle des couples des 13 éléments 0, 1, 2, ... , 9, 0′, 1′, 2′, disposés de la manière suivante :

---

[1] Cayley. *Mathem. Papers*, I, p. 481, on Philosoph. Magazine, 37 (1850), p. 50. — Voir aussi Netto. *Combinatorik*, 1901, p. 202 à 235 et particulierement p. 228. — Dans *L'Enseignement mathématique* (N° 1-2), 1917, j'ai établi que pour 9 éléments le problème de Cayley est possible et qu'il a 2 solutions différentes. Je donnais en commençant la démonstration de Cayley relative au cas de 15 éléments, parce que intéressante et simple, sans songer à douter de la prétention sur laquelle elle repose.

01	12	23	34	45	56	67	78	89	90′	0′1′	1′2′	2′0
02	13	24	35	46	57	68	79	80′	91′	0′2′	1′0	2′1
03	14	25	36	47	58	69	70′	81′	92′	0′0	1′1	2′2
04	15	26	37	48	59	60′	71′	82′	90	0′1	1′2	2′3
05	16	27	38	49	50′	61′	72′	80	91	0′2	1′3	2′4
06	17	28	39	40′	51′	62′	70	81	92	0′3	1′4	2′5

il n'existe qu'un seul système de 6 couples, ayant un couple dans chaque ligne et renfermant les 12 éléments 1, 2, ..., 1′, 2′, à savoir le système suivant : 67, 2′1, 58, 1′2, 49, 0′3. Or il en existe 144 autres, remplissant les mêmes conditions ; ces systèmes vont par *couples* de systèmes que j'appellerai *conjugués*, déductibles l'un de l'autre par la substitution $|x, N - x|$. Le système 1, N . 1 ; 2, N . 2 ; ... ; $\frac{N-1}{2}$, $\frac{N+1}{2}$, donné par Cayley, est le seul identique à son conjugué ou self-conjugué. Pour $6n + 3$ éléments, lorsque $6n + 1$ est un nombre premier (cas de 15 éléments de la démonstration de Cayley), et pour $6n + 1$ éléments, lorsque $6n - 1$ est un nombre premier de la forme $4x - 1$, je peux donner un système général de couples, remplissant les conditions demandées par Cayley, différent de son conjugué et donc autre que le système self-conjugué, au moyen d'une racine primitive α de $6n + 1$, resp. de $6n - 1$[1]. Pour 9 éléments, ce système avec son conjugué et son self-conjugué, permettent de construire immédiatement le système de Steiner suivant :

780 713 726 745 815 823 846 016 025 034 124 356

que la substitution cyclique (0123456) transforme successivement en 6 autres systèmes de Steiner différents par tous les triples, et renfermant donc avec le premier les 84 triples de 9 éléments.

Le manque de place ne me permet pas de développer davantage la question ; mais le problème de Cayley : *Répartir les* $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$ *triples de* N *éléments en* N — 2 *systèmes de Steiner*, ou en d'autres termes : *trouver* N — 2 *systèmes de Steiner de* N *éléments différents par tous les triples*, me paraît se poser au contraire d'une manière positive, pour $N = 6n + 1$ et pour $N = 6n + 3$ éléments, $N = 7$ étant probablement le seul cas pour lequel il manque de solutions.

---

[1] Ces deux systèmes sont respectivement :

Pour $6n + 3$: $\alpha^0 \alpha^n$, $\alpha^1 \alpha^{n+1}$, ..., $\alpha^{n-1} \alpha^{2n-1}$, $\alpha^{2n} \alpha^{3n}$, $\alpha^{2n+1} \alpha^{3n+1}$, ..., $\alpha^{3n-1} \alpha^{4n-1}$, $\alpha^{4n} \alpha^{5n}$, ..., $\alpha^{5n-1} \alpha^{6n-1}$.

Pour $6n + 1$: $\alpha^0 \alpha^1$, $\alpha^2 \alpha^3$, ..., $\alpha^{6n-4} \alpha^{6n-3}$, en entendant naturellement par l'élément α^x, le plus petit reste positif de ce nombre (mod. $6n + 1$ resp. $6n - 1$).

11. — Prof. Dr L. Crelier. — *Interprétation géométrique rationnelle des quantités imaginaires.* — I. Toutes les opérations de la géométrie analytique à deux dimensions supposent que nous travaillons sur *l'endroit* du plan fondamental.

Si nous introduisons le concept de *l'envers* du plan, nous aurons, avec un axe commun, celui des x par exemple, de nouvelles ordonnées *qui correspondent aux valeurs* $+\sqrt{-1}$ *et* $-\sqrt{-1}$ ou $+i$ et $-i$.

II. Considérons maintenant une équation algébrique, par exemple $x^2 + y^2 = 16$. A toutes les valeurs de x correspondent des valeurs de y; entre -4 et $+4$ elles viennent sur l'endroit et forment un cercle; entre $-\infty$ et -4, puis entre $+4$ et $+\infty$ elles viennent sur l'envers et forment une hyperbole équilatère également comprise dans la formule.

III. Recherchons les points de coupe de la droite $x = 5$ avec la courbe $x^2 + y^2 = 16$. Nous trouvons $(5, +3i)$ et $(5, -3i)$. Comme la droite est également représentable sur l'envers, *les points de coupe sont sur l'envers, sur l'hyperbole.*

IV. Passons aux points de coupe de la même courbe avec la droite $y = 2x - 16$. Nous trouvons

$$x = \frac{32}{5} \pm \frac{4}{5}\sqrt{11}\, i \quad \text{et} \quad y = -\frac{16}{5} \pm \frac{8}{5}\sqrt{11}\, i\,.$$

Pour trouver les images de ces points, nous avons deux moyens :

a) Nous prenons comme nouvel axe des x le diamètre perpendiculaire à la droite; l'équation de la courbe ne change pas; celle de la droite devient $x = \frac{16}{5}\sqrt{5}$. D'après le raisonnement précédent nous trouvons les deux points de coupe sur l'envers du plan et sur l'hyperbole correspondante.

b) Ou bien nous déplaçons les axes jusqu'en $\left(\frac{32}{5}, -\frac{16}{5}\right)$ comme nouvelle origine et sur l'envers, à cause du déplacement des 2 axes, nous avons les coordonnées $\pm\frac{4}{5}\sqrt{11}i$ et $\pm\frac{8}{5}\sqrt{11}i$ ou les points $\left(\frac{4}{5}\sqrt{11}i, \frac{8}{5}\sqrt{11}i\right)$ et $\left(-\frac{4}{5}\sqrt{11}i, -\frac{8}{5}\sqrt{11}i\right)$.

V. On peut opérer de la même manière avec une conique quelconque et nous arrivons aux conclusions suivantes :

a) *Les points de coupe d'une conique avec une droite extérieure sont les intersections de la droite sur l'envers du plan avec la conique associée qui admet la direction de la droite comme diamètre conjugué secondaire. Le diamètre principal sert d'axe réel commun aux deux faces du plan.*

b) *Les valeurs analytiques* $x = a \pm bi$ *et* $y = c \pm di$ *trouvées comme solutions, correspondent aux mêmes points;* a *et* c *sont les coordonnées de la nouvelle origine, sur le centre du segment de droite entre les points de coupe ;* b *et* — b *sont les abscisses, tandis que* c *et* — c *sont les ordonnées de ces points sur l'envers du plan fondamental.*

12. — Dans sa *séance administrative*, la Société a procédé au renouvellement de son comité pour 1920 et 1921. M. le prof. L. Crelier (Berne) a été élu président, M. le prof. O. Spiess (Bâle), vice-président, et M. le prof. Gustave Dumas (Lausanne) secrétaire-trésorier.

La prochaine réunion ordinaire aura lieu à *Neuchâtel.*

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Angleterre. — M. G. H. Hardy, F. R. S., du Trinity College de Cambridge, a été nommé professeur de mathématiques pures à l'Université d'Oxford.

Belgique. — La Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique a élu, membre titulaire, M. Cl. Servais (Gand), et membre correspondant M. Th. Dedonder (Bruxelles).

Questions mises au concours. — La Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique a mis au concours les questions suivantes (séance du 7 mars 1914) :

On demande une contribution importante à la géométrie infinitésimale des surfaces courbes. — (Prix : huit cents francs.)

Résumer les travaux sur les systèmes de coniques dans l'espace et faire de nouvelles recherches sur ces systèmes. — (Prix : huit cents francs.)

Le délai, fixé primitivement au 1er août 1915, a été prorogé au 1er août 1920.

France. — *Collège de France.* Cours publics du 1er semestre à partir du 1er décembre 1919. — Nous relevons les cours suivants concernant les sciences mathématiques et physiques :

M. Humbert : Quelques applications des fonctions elliptiques. — M. Hadamard : L'œuvre de Poincaré : théorie des fonctions. — M. Brillouin : Propriétés générales des couches superficielles ; en particulier des couches moléculaires liquides et solides. — M. Langevin : Les aspects successifs et les confirmations expérimentales du principe de relativité.

Académie des Sciences. — L'Académie a décerné le *Prix Bordin* à M. S. Lefschetz, ingénieur des Arts et Manufactures, professeur à l'Université de Kansas.