

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1918)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES FOYERS RATIONNELS D'UNE COURBE ALGÈBRE  
**Autor:** Turrière, Émile  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18046>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LES FOYERS RATIONNELS D'UNE COURBE ALGÈBRIQUE

PAR

Émile TURRIÈRE (Montpellier).

Dans une lettre adressée à M. C.-A. LAISANT et publiée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*<sup>1</sup>, M. P. APPELL a récemment appelé l'attention sur une question qui se rattache à mes recherches d'arithmogéométrie : à certaines courbes algébriques du plan ou de l'espace, peuvent être associés des points qui jouissent d'une propriété focale des coniques ; *la distance d'un point quelconque d'une telle courbe à un tel point est une fonction rationnelle des coordonnées cartésiennes du point courant de la courbe.*

C'est précisément l'objet du paragraphe 19 de mon premier article sur les *Notions d'arithmogéométrie* de mars 1916<sup>2</sup>.

Etant donnée, par exemple, une courbe plane dont le point courant M a pour coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$ , le *problème des arithmodistances* pour cette courbe et pour un point fixe F de coordonnées  $x_0$  et  $y_0$  consiste à déterminer ceux des points de la courbe tels que la distance MF soit un nombre rationnel. J'ai indiqué la solution

$$x = x_0 + (1 - t^2)f(t) , \quad y = y_0 + 2tf(t) ,$$

dépendant d'une fonction rationnelle arbitraire  $f(t)$  du para-

---

<sup>1</sup> P. APPELL. — Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique plane ou gauche, *Nouvelles Annales de Mathématiques* [4], t. XVIII, novembre 1918, p. 401-402.

<sup>2</sup> Notions d'arithmogéométrie, *L'Enseignement mathématique*, 18<sup>e</sup> année : 15 mars 1916, p. 81-110, et 15 novembre 1916, p. 397-428 ; 19<sup>e</sup> année : 15 mai 1917, p. 159-191, et juillet-septembre-novembre 1917, p. 233-272 ; 20<sup>e</sup> année : janvier 1919, p. 161-174.

mètre  $t$ . Ces deux équations paramétriques représentent une arithmocourbe plane jouissant de la propriété indiquée :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = [(1 + t^2)f(t)]^2 .$$

L'équation polaire de cette courbe, lorsque le point  $F$  imposé est pris pour pôle, est :

$$r = f\left(\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}\right) ,$$

$f$  étant une fonction rationnelle arbitraire de  $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$  .

Dans cette catégorie de courbes planes, rentrent comme courbes particulières les coniques rapportées à un foyer, la strophoïde...

De même pour les courbes gauches, il suffit de prendre

$$x = x_0 + af(t) , \quad y = y_0 + bf(t) , \quad z = z_0 + cf(t) ,$$

$a, b, c$  étant les coordonnées d'un arithmopoint de l'arithmosphère d'équation :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 .$$

Ces coordonnées  $a, b, c$  sont des fonctions rationnelles de deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$a = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \mu^2 + 1} , \quad b = \frac{2\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + 1} , \quad c = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - 1}{\lambda^2 + \mu^2 + 1} ;$$

il suffit de supposer que ces paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux fonctions arbitraires d'un même troisième paramètre  $t$ .

Les coniques sphériques sont un des cas particuliers les plus remarquables.

Une observation analogue peut être présentée au sujet des surfaces que représentent les équations paramétriques

$$x = x_0 + \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} f(u, v) ,$$

$$y = y_0 + \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} f(u, v) ,$$

$$z = z_0 + \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} f(u, v) ,$$

avec une fonction rationnelle arbitraire  $f(u, v)$  des deux paramètres  $u$  et  $v$  de la représentation.

Cette notion de foyers rationnels est susceptible de diverses généralisations.

Le foyer rationnel peut être, par exemple, remplacé par une courbe de direction quelconque.

Soit  $t$  le paramètre de représentation de la courbe de direction; si, sur la tangente au point  $M$  correspondant de cette courbe, on porte un vecteur  $M\mu$  dont la mesure est une fonction rationnelle quelconque du paramètre  $t$ , l'extrémité  $\mu$  du vecteur décrit une courbe pour laquelle la courbe de direction joue un rôle analogue à celui d'un foyer rationnel.

Une autre extension de cette même notion de foyer rationnel est fournie par la considération d'une des plus importantes congruences de droites: la congruence de MINDING, formée par les normales d'une famille de cyclides.

Cette congruence, qui est la seule congruence de normales dont les nappes focales dégénèrent en deux courbes, a été primitivement étudiée par F. MINDING en 1835, dans d'importantes recherches de statique<sup>1</sup>. Elle joue un rôle tout spécial dans l'étude générale des systèmes de rayons lumineux. Elle a été l'objet de recherches de J.-C. MAXWELL<sup>2</sup>.

Soient

$$(E) \quad x_1 = a \cos \varphi, \quad y_1 = b \sin \varphi, \quad z_1 = 0,$$

$$(H) \quad x_2 = c \operatorname{ch} \omega, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = b \operatorname{ch} \omega,$$

les équations paramétriques d'une ellipse (E) et d'une hyperbole (H) focales.

La congruence des rayons joignant un point quelconque de paramètre  $\varphi$  sur l'ellipse et un point quelconque de paramètre  $\omega$  sur l'hyperbole est précisément la congruence de MINDING.

F. MINDING. — Untersuchung betreffend die Frage nach einem Mittelpunkte nicht paralleler Kräfte; *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Journal de CRELLE), B<sup>d</sup> XIV, 1835, S. 289-315.

Ueber den Ort sämtlichen Resultanten eines der Drehung unterworfenen Systemes von Kräften, *ebenda*, B<sup>d</sup> XV, 1836, S. 27-38.

Einige Sätze über die Veränderungen, welche ein System von Kräften durch Drehung derselben erleidet; nebst einer Anwendung auf das Seilpolygon, *ebenda*, B<sup>d</sup> XV, 1836, S. 313-316.

<sup>2</sup> J.-C. MAXWELL. — On the cyclide, *The quarterly journal of pure and applied mathematics*, vol. IX, 1868, p. III-128; *Collected papers*, t. II, p. 144-159.

La distance des deux points focaux de chaque rayon de la congruence est

$$a \operatorname{ch} \omega - c \cos \varphi = \frac{a}{c} x_2 - \frac{c}{a} x_1 ;$$

cette distance est donc une fonction rationnelle des coordonnées de ces points focaux.

Si, d'autre part,  $\lambda$  représente la distance comptée à partir de l'un des points focaux, le point de l'ellipse (E) par exemple, jusqu'à l'une des cyclides orthogonales aux droites de la congruence, cette distance  $\lambda$  est égale à

$$\lambda = -c \cos \varphi + \text{const} = -\frac{c}{a} x_1 + \text{const} ;$$

elle est donc une fonction rationnelle des coordonnées de l'un ou l'autre des deux points focaux.

---

## CHRONIQUE

---

### Société mathématique suisse.

Lugano, 8 septembre 1919.

La Société mathématique suisse a tenu sa neuvième réunion ordinaire à Lugano, le 8 septembre 1919, sous la présidence de M. le Prof. Michel PLANCHEBEL (Fribourg), à l'occasion de la centième assemblée annuelle de la Société helvétique des sciences naturelles. Le programme de la partie scientifique comprenait onze communications ; en voici les résumés :

1. — D<sup>r</sup> Ed. GUILLAUME (Berne). — *Un nouvel algorithme : les « dérivées homogènes » et une nouvelle opération spatiale : l'« aberration »*. — La Théorie de la Relativité restreinte (c'est-à-dire sans champ de gravitation), qui a été l'objet d'innombrables travaux, n'avait pas donné naissance jusqu'ici à la création d'êtres mathématiques nouveaux, malgré la haute originalité des conceptions sur lesquelles elle repose, et contrairement aux traditions de la Physique, qui a toujours été l'inspiratrice de la Mathématique.

Il faut en chercher la raison dans le fait que la Théorie faisait intervenir la notion fondamentale de *temps* d'une façon fort étrange, déconcertant complètement l'intuition. Nous avons