

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1918)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOUVEAUX THÉORÈMES SUR LE VIRIEL DE FORCES ET LEURS APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES  
**Autor:** Boulad, Farid  
**Kapitel:** Applications.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18045>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*viriels de ces divers couples est nulle quelle que soit le pôle considéré.*

Ce théorème se démontre au moyen du précédent.

**THÉORÈME V.** — *Lorsqu'on imprime des déplacements virtuels quelconques aux points d'application d'un nombre quelconque de forces liées et à ceux des forces d'un système quelconque de couples liés dans l'espace, le travail virtuel total effectué par ces forces et ces couples pour ces déplacements virtuels, est égal à la variation correspondante ou à la différentielle du viriel total de ces forces et couples liés relativement à un pôle quelconque fixe.*

En effet, désignons respectivement par  $\mathfrak{E}$  et  $V$ , le travail virtuel total et le viriel total de ces forces et couples; par  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  les projections du déplacement virtuel donné au point d'application d'une des forces sur trois axes rectangulaires  $Oxyz$ , par  $P$  la valeur algébrique commune des forces d'un de ces couples et par  $\delta l$ , la variation de la projection (*longueur de liaison*) de la distance des deux points d'application des forces de ce couple sur la direction commune. Les deux relations (1) et (2) donnent par différentiation l'équation suivante :

$$\delta V = \Sigma X \delta x + \Sigma Y \delta y + \Sigma Z \delta z + \Sigma P \delta l = \mathfrak{E} ,$$

dans laquelle  $l$  sera  $+$  ou  $-$  selon que l'angle  $\omega$  du couple correspondant à  $P$  est aigu ou obtus.

### Applications.

1. — *Aux figures réciproques planes ou gauches de CREMONA.* On sait, d'après une propriété statique de ces figures<sup>1</sup>, que, si  $a$  et  $b$  sont les longueurs des deux côtés homologues de deux figures polygonales réciproques CREMONA (A) et (B), et si, aux extrémités d'un côté  $a$  de la première (A), on applique deux forces égales et directement opposées (*couple lié rectiligne*) ayant pour valeur commune la longueur  $b$  et pour sens celui du polygone fermé dans la figure (B) corres-

<sup>1</sup> Cours de Géométrie de l'Ecole polytechnique, par M. d'OCAGNE, t. II, p. 159.

pendant à l'une des deux extrémités du côté  $a$ , chaque nœud de la figure (A) sera sollicité par un système de forces en équilibre tel que l'ensemble de toutes les forces appliquées aux divers nœuds de cette figure forme un système de couples liés.

D'où, en écrivant en vertu du théorème IV, que le viriel total de ces deux couples est nul, on a la relation suivante :

$$\Sigma(\pm ab) = 0 ,$$

dans laquelle le signe de chacun de ses termes sera celui des deux forces opposées appliquées aux extrémités de l'un quelconque des deux côtés  $a$ ,  $b$  figurés dans le terme considéré.

*Application de cette propriété au calcul d'un système articulé intérieurement hyperstatique.* Considérons un système articulé extérieurement isostatique à lignes surabondantes; concevons qu'on supprime toutes les barres surabondantes de ce système et qu'on applique aux extrémités A et B d'une de ces barres supprimées deux forces répulsives égales de valeur commune F. Désignons par (S) ce système articulé sans lignes surabondantes librement dilatable, par  $f$  la longueur de la barre AB et par  $t_k$  celle d'une barre quelconque du système (S). Soit  $T_k$  la tension produite dans la barre  $t_k$  sous l'action des forces répulsives F.

Cela étant, comme on sait que le polygone des forces de CREMONA correspondant aux forces F et aux tensions  $T_k$  est un polygone réciproque de la partie du système articulé (S) seul influencé par les forces F, on a, en vertu de la propriété ci-dessus,

$$Ff - \Sigma T_k t_k = 0 .$$

A présent, si l'on fait subir aux longueurs  $f$  et  $t_k$  des variations ou dilatations virtuelles  $\delta f$  et  $\delta t_k$ , on obtient, par une différentiation de la relation ci-dessus, la formule suivante :

$$T\delta f - \Sigma T_k \delta t_k = 0$$

qu'on applique fréquemment au calcul du système articulé hyperstatique ci-dessus.

2. — *Démonstration mécanique des théorèmes géométriques de CARNOT et de MASCHERONI.* Soit un tétraèdre quelconque  $SABC$  (fig. 1); désignons les arêtes du trièdre  $S$  par  $a, b, c$

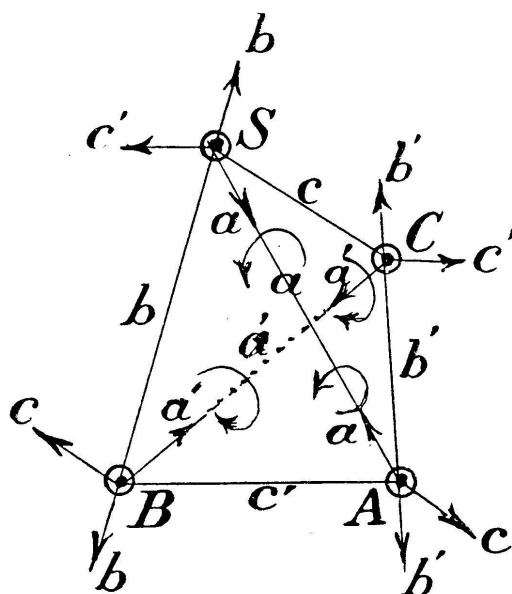


Fig. 1

et les arêtes qui leur sont respectivement opposées par  $a', b', c'$ , et par la notation  $(c, c')$  l'angle formé par les arêtes  $c$  et  $c'$ . Démontrons au moyen du viriel la relation suivante de CARNOT :

$$a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2 - 2cc' \cos (c, c') = 0 .$$

En effet, il est aisé de voir que cette relation n'est autre que celle qu'on obtient en égalant à zéro, d'après le théorème IV, la somme algébrique des viriels de divers couples liés formés par l'ensemble du système de trois forces concourantes en équilibre, appliquées dans la figure aux sommets de ce tétraèdre et ayant pour sens celui indiqué par des flèches sur la figure, et pour valeurs et directions les mêmes que celles des arêtes désignées par les mêmes lettres que ces forces.

On vérifie que les trois forces appliquées à chaque sommet sont en équilibre, en remarquant que les arêtes désignées par les mêmes lettres que ces trois forces forment dans la figure un triangle fermé (considéré comme polygone des forces) ayant pour sens celui des forces.

Il convient de rappeler que les forces d'un couple lié rec-

tiligne sont  $+$  ou  $-$  selon qu'elles se repoussent ou elles s'attirent.

A présent, passons à la démonstration de la relation suivante de MASCHERONI

$$a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - \dots - 2bc \cos(b, c) - 2bd \cos(b, d) \\ - 2be \cos(b, e) - \dots = 0,$$

dans laquelle  $a, b, c, d, e, \dots$  désignent respectivement les côtés AB, BC, CD, ... (fig. 2) d'un polygone quelconque

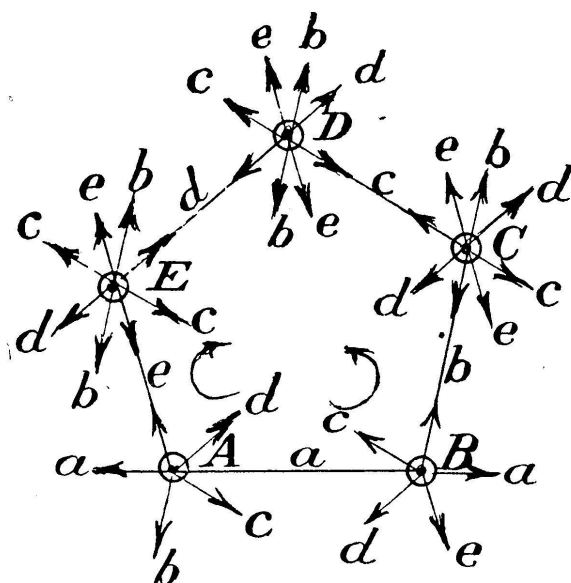


Fig.2

ABCD. En effet, appliquons aux sommets de ce polygone les systèmes de forces en équilibre suivants : Au sommet A le système de forces  $a, b, c, d, \dots$  ayant pour polygone fermé de forces le polygone ABCD. Au sommet B, même système de forces changé de sens. Quant à chacun des sommets C, D, E, ..., nous appliquerons un même système de forces formé par l'ensemble de couples de deux forces égales et directement opposées ayant mêmes directions et valeurs que celles de tous les côtés de ce polygone, sauf le côté  $a$ .

En remarquant que le système de forces appliquées à chaque sommet est en équilibre et que leur ensemble forme un système de couples liés, il suffit d'écrire, en vertu du

théorème IV, que la somme algébrique des viriels de ce couple est nulle, pour avoir la relation ci-dessus.

*Remarque.* Un angle quelconque, par exemple tel que  $(b, d)$ , figurant dans la relation ci-dessus, est l'angle formé par le côté  $d$  avec le prolongement de  $b$ .

3. — *Détermination directe du travail virtuel total des forces extérieures et intérieures dans un système de points matériels.*

Considérons un système quelconque de points matériels  $A, B, C, \dots M, N, \dots$  (fig. 3) assujettis à des liaisons sans frottement et dont chacun est en équilibre sous l'action des forces extérieures et intérieures qui les sollicitent.

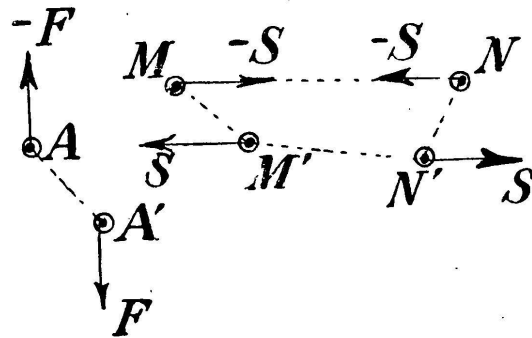


Fig. 3

Désignons par  $F$  la valeur de la force extérieure appliquée à un point quelconque  $A$  de ce système et par  $S$  la valeur commune des deux forces intérieures (actions mutuelles) égales et directement opposées qui se développent par deux points quelconques  $M$  et  $N$  de ce système ( $S$  sera considéré  $+$  ou  $-$  selon qu'il s'agit des forces répulsives ou attractives) et par  $s$  la valeur absolue de la distance  $MN$  entre ces deux points.

Faisons subir aux points de ce système des déplacements virtuels quelconques. Soient  $AA'$ ,  $MM'$ ,  $NN'$  les déplacements imprimés aux points  $A, M, N$ . Supposons que toutes les forces  $F$  et  $S$  se soient déplacées en même temps que leurs points d'applications aux nouveaux points  $A', M', N'$ .

Enfin, appliquons à tous les points primitifs  $A, M, N$ , les forces primitives  $F$  et  $S$  changées de sens.

Il en résulte que l'ensemble de toutes les forces ainsi obtenues ( $-F$  en  $A$ ), ( $F$  en  $A'$ ), ( $-S$  en  $M$  et  $N$ ) et ( $S$  en  $M'$  et  $N'$ ) forment les trois systèmes de couples liés suivants :  $F(A, A')$ ,  $-S(M, N)$  et  $+S(M', N')$ . Le premier de ces couples a pour viriel :

$$+ F \cdot AA' \cos \omega = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z ,$$

et les deux autres couples ont aussi pour viriels

$$- Ss \quad \text{et} \quad + S(s + \delta s) .$$

En totalisant ces viriels et en égalant à zéro leur somme, on aura :

$$T = \Sigma X\delta x + \Sigma Y\delta y + \Sigma Z\delta z + \Sigma S\delta s = 0 . \quad (3)$$

4. — *Etablissement de l'expression ayant pour différentielle totale celle du travail virtuel.* Considérons le même système ci-dessus de points matériels. Comme toutes les forces concourantes extérieures et intérieures appliquées à chacun de ces points sont en équilibre, leur viriel total est nul, en vertu de la remarque du corollaire I, d'où l'expression suivante cherchée du viriel :

$$V = \Sigma Xx + \Sigma Yy + \Sigma Zz + \Sigma Ss = 0$$

ayant pour différentielle totale l'équation (3) du travail virtuel.

---