

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOUVEAUX THÉORÈMES SUR LE VIRIEL DE FORCES ET LEURS APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES
Autor: Boulad, Farid
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18045>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

6bis. — La première partie de notre travail, dont nous venons d'achever l'exposé, avait pour but d'établir la condition nécessaire et suffisante pour que deux formes algébriques binaires, aux indéterminées x, y , admettent, conformément à la définition posée au n° 1, quelque racine commune : dans la deuxième partie, qui suivra prochainement, nous établirons, en nous appuyant sur ce résultat fondamental, les conditions nécessaires et suffisantes pour que, n équations algébriques entières, à l'inconnue x , étant données, il existe quelque valeur de cette inconnue les vérifiant toutes.

NOUVEAUX THÉORÈMES SUR LE VIRIEL DE FORCES ET LEURS APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES

PAR

Farid BOULAD (au Caire).

CLAUSIUS a appelé *viriel de forces*, l'expression suivante : $V = Xx + Yy + Zz$ dans laquelle X, Y, Z désignent les projections d'une force AP liée¹ à un point A sur trois axes $Oxyz$ rectangulaires en un point O dit *pôle*, et x, y, z les coordonnées du point d'application de cette force par rapport à ces axes.

D'après cette expression, le viriel d'une force liée AP relativement à un pôle O , n'est autre que le travail effectué par cette force agissant toujours parallèlement à elle-même, si son point d'origine était déplacé du pôle O au point d'application A de cette force.

Cette même expression a été utilisée d'abord par CLAUSIUS

¹ M. APPELL a donné le nom d'une *force liée à un point*, à une force AP appliquée à un point A déterminé de l'espace. Nous adopterons cette dénomination dans tout ce qui suit.

et YVON VILLARCEAU dans leurs théorèmes sur la force vive d'un système matériel, et ensuite introduite sous une autre forme par M. F. LUCAS, dans la théorie du mouvement vibratoire d'un système élastique.

A notre connaissance, on n'a encore étendu la notion du viriel ni à l'étude des conditions d'équilibre des forces, ni à celle du travail virtuel du système matériel.

Mais des recherches sur cette question, qui nous a tout particulièrement intéressé, nous ont conduit à de nouveaux théorèmes sur le viriel, dans le genre de ceux qui ont trait aux moments des forces par rapport à un point. Nous avons cru utile de les exposer dans cette note avec des applications géométriques¹ et mécaniques qui montreront que la notion du viriel jouit de propriétés remarquables.

Ces propriétés résultent d'ailleurs des points suivants : Le viriel d'un couple lié a une valeur constante quelle que soit la position du pôle correspondant. Le travail virtuel effectué par un système quelconque de forces et de couples liés pour des déplacements virtuels quelconques imprimés à leurs points d'application, est égal à la variation correspondante ou à la différentielle de ce système par rapport à un pôle quelconque. En outre, le travail virtuel d'un système quelconque de forces (F) appliquées à un point A , pour un déplacement virtuel quelconque AA' donné à ce point, se ramène également au viriel du système de couples liés formé par l'ensemble des deux systèmes suivants de forces : Du système de forces (F) déplacé en A' , parallèlement à lui-même et de celui qu'on obtient en changeant le sens de toutes les forces primitives (F) appliquées en A . Enfin voici, en résumé, les principaux résultats des susdites applications :

1° Une nouvelle propriété métrique des polygones réciproques quelconques de CREMONA qui s'énonce comme suit : *Dans deux polygones réciproques, la somme algébrique des produits qu'on obtient en multipliant chaque côté de l'une de*

¹ Qu'il nous soit permis de remercier ici M. d'OCAGNE d'avoir bien voulu nous donner des renseignements sur les applications géométriques exposées dans cette note. Nous devons à son obligeance l'étude de ces applications.

ces deux figures par son homologue dans l'autre figure, est égale à zéro.

Le signe des termes de cette somme sera défini plus loin dans la démonstration de cette propriété. Nous montrerons également que cette propriété générale offre l'utilité de s'appliquer, par une simple différentiation, au calcul des tensions dans les barres d'un système articulé statiquement indéterminé. En particulier, si les deux polygones ci-dessus sont deux quadrilatères réciproques, on a le théorème suivant : *La somme des produits, en valeur absolue, qu'on obtient en multipliant chaque diagonale par son homologue, est égale à la somme des produits de chaque côté par son homologue.*

2° Le viriel peut servir à la démonstration d'un grand nombre de théorèmes géométriques et à établir des relations trigonométriques. Nous nous bornerons, d'après le conseil de M. d'OCAGNE, à démontrer, à titre d'exemple, les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME DE CARNOT. — *Dans tout tétraèdre la somme des carrés des deux arêtes opposées égale la somme des carrés des deux autres arêtes opposées, plus deux fois le produit des arêtes restantes par le cosinus de leur angle.*

THÉORÈME DE MASCHERONI. — *Dans tout polygone plan ou gauche, le carré d'un côté égale la somme des carrés de tous les autres côtés augmentée de deux fois la somme de tous les produits qu'on obtient en multipliant de toutes les manières possibles deux côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

La démonstration que nous donnerons plus loin pour ces théorèmes montrera que le viriel offre l'interprétation mécanique énoncée ci-après des relations algébriques du second degré entre les éléments linéaires des figures polygonales ou polyédriques.

Toute relation algébrique du second degré entre les longueurs et directions des côtés ou arêtes de ces figures, est la somme algébrique des viriels d'un système de couples liés formé par l'ensemble d'un certain nombre de systèmes de

forces en équilibre appliquées aux sommets de ces figures et ayant mêmes directions et valeurs que celles des côtés ou arêtes de ces figures.

3° La valeur du travail virtuel total des forces extérieures et intérieures dans un système de points matériels assujettis à des liaisons sans frottement, peut être fourni au moyen du viriel de la manière suivante : On ramène les forces à des couples en considérant l'ensemble des deux systèmes suivants de forces : 1° Le système de forces obtenu en changeant le sens de toutes les forces extérieures et intérieures appliquées aux divers points du système matériel avant la déformation virtuelle. 2° Le même système primitif de forces appliqué parallèlement à lui-même en ces mêmes points dans leurs nouvelles positions après la déformation. Il en résulte que le viriel total du système de couples liés formés ainsi par l'ensemble de ces deux derniers systèmes de forces, est égal au travail virtuel effectué par les forces extérieures et intérieures du système matériel ci-dessus.

4° Le viriel permet d'établir aussi directement l'expression ayant pour différentielle, le travail virtuel total ci-dessus des forces dans un système matériel.

Avant d'exposer les théorèmes annoncés ci-dessus, rappelons d'abord en quelques mots les expressions usuelles du viriel des forces de ces couples.

Définition et convention du viriel des forces et des couples liés.

Désignons par P la valeur absolue d'une force liée AP et par θ l'angle que forme cette force avec le prolongement du rayon polaire OA joignant son point d'application A au pôle O . Le viriel de cette force, défini ci-dessus, relativement à ce pôle, a pour expression :

$$V = Xx + Yy + Zz = P \cdot OA \cos \theta . \quad (1)$$

Ce viriel sera considéré $+$ ou $-$ selon que l'angle θ est aigu ou obtus.

De même, considérons dans l'espace un couple formé par

deux forces AP et BQ égales, parallèles et de sens contraire, liées à deux points A et B.

Désignons par P la valeur commune de ces deux forces, par ω l'angle que forme l'une quelconque de ces deux forces avec le prolongement de la distance AB de leurs points d'application, et par l la projection de cette distance AB sur la direction de ces forces. Appelons *longueur de liaison* de ce couple, la longueur représentant la distance AB estimée suivant la direction de ces forces.

Relativement à un pôle quelconque, le viriel de ce couple lié est constant. Il a pour valeur

$$V = P \cdot AB \cos \omega = \pm Pl. \quad (2)$$

Il est $+$ ou $-$ selon que l'angle ω est aigu ou obtus.

Si $\omega = 0$ ou 2π , le couple lié sera formé par deux forces directement opposées. Dans ce cas particulier, il sera dit *rectiligne*. Son viriel est égal à $P \cdot AB$ en considérant P comme $+$ ou $-$ selon que les deux forces se repoussent ou s'attirent.

Enoncé des nouveaux théorèmes sur le viriel.

THÉORÈME I. — *Relativement à un même pôle O, le viriel de la projection d'une force liée AP sur un plan quelconque passant par le rayon polaire OA, est égal au viriel de cette même force AP.*

Soit AP' la projection de cette force sur le plan considéré passant par OA, et soit R la projection commune des extrémités P et P' sur le rayon OA, les viriels de ces deux forces AP et AP' par rapport à O, ont la même valeur $V = \pm OA \cdot OR$.

THÉORÈME II. — *Le viriel d'une force liée AP relativement à un pôle O est égal au viriel de cette même force relativement à la projection de ce pôle sur un plan quelconque passant par cette force.*

Ce dernier théorème résulte de ce que le viriel est symétrique par rapport au pôle O et à l'extrémité P.

THÉOREME III. — *Pour qu'un système quelconque de forces liées dans l'espace ait une résultante nulle, il faut et il suffit que le viriel total de ces forces relativement à un pôle O soit constant quelle que soit la position du pôle.*

En effet, soient x, y, z les coordonnées du pôle considéré C par rapport à trois axes rectangulaires $Oxyz$ fixes dans l'espace, a_k, b_k, c_k celles du point d'application d'une quelconque de ces forces et X_k, Y_k, Z_k la projection de cette force sur ces trois axes.

Si V_c et V_0 représentent respectivement les viriels totaux de ce système de forces par rapport aux pôles C et O, on a :

$$V_c = V_0 - (\Sigma X_k x + \Sigma Y_k y + \Sigma Z_k z) ,$$

quel que soit le pôle C, cette relation donne $V_c = V_0$. Mais comme V_0 est constant, il faut que V_c le soit aussi. S'il en est ainsi, la relation ci-dessus donne, quel que soit C, la condition suivante :

$$\Sigma X_k = \Sigma Y_k = \Sigma Z_k = 0 .$$

COROLLAIRE I. — *Si les points d'application d'un système quelconque de forces liées de résultante nulle, sont les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point M de l'espace sur ces forces, le viriel total de ces forces est nul, quel que soit le pôle considéré, et réciproquement pour un système de forces liées dont les points d'application sont définis comme ci-dessus.*

Remarque. — Dans le cas particulier où les points d'application de ces forces se confondent avec le point M, on obtient le théorème suivant bien connu et son réciproque. *La somme algébrique des viriels d'un nombre quelconque de forces concourantes de résultante nulle, est nulle.*

THÉOREME IV. — *Si un système de points libres, dont chacun est sollicité par un nombre quelconque de forces en équilibre, est tel que l'ensemble de toutes les forces tant extérieures qu'intérieures (suivant la direction des lignes de jonction de ces points) appliquées aux divers points de ce système, forment un système de couples liés, la somme algébrique des*

viriels de ces divers couples est nulle quelle que soit le pôle considéré.

Ce théorème se démontre au moyen du précédent.

THÉOREME V. — *Lorsqu'on imprime des déplacements virtuels quelconques aux points d'application d'un nombre quelconque de forces liées et à ceux des forces d'un système quelconque de couples liés dans l'espace, le travail virtuel total effectué par ces forces et ces couples pour ces déplacements virtuels, est égal à la variation correspondante ou à la différentielle du viriel total de ces forces et couples liés relativement à un pôle quelconque fixe.*

En effet, désignons respectivement par \mathfrak{E} et V , le travail virtuel total et le viriel total de ces forces et couples; par δx , δy , δz les projections du déplacement virtuel donné au point d'application d'une des forces sur trois axes rectangulaires $Oxyz$, par P la valeur algébrique commune des forces d'un de ces couples et par δl , la variation de la projection (*longueur de liaison*) de la distance des deux points d'application des forces de ce couple sur la direction commune. Les deux relations (1) et (2) donnent par différentiation l'équation suivante :

$$\delta V = \Sigma X \delta x + \Sigma Y \delta y + \Sigma Z \delta z + \Sigma P \delta l = \mathfrak{E} ,$$

dans laquelle l sera $+$ ou $-$ selon que l'angle ω du couple correspondant à P est aigu ou obtus.

Applications.

1. — *Aux figures réciproques planes ou gauches de CREMONA.* On sait, d'après une propriété statique de ces figures¹, que, si a et b sont les longueurs des deux côtés homologues de deux figures polygonales réciproques CREMONA (A) et (B), et si, aux extrémités d'un côté a de la première (A), on applique deux forces égales et directement opposées (*couple lié rectiligne*) ayant pour valeur commune la longueur b et pour sens celui du polygone fermé dans la figure (B) corres-

¹ Cours de Géométrie de l'Ecole polytechnique, par M. d'OCAGNE, t. II, p. 159.

pendant à l'une des deux extrémités du côté a , chaque nœud de la figure (A) sera sollicité par un système de forces en équilibre tel que l'ensemble de toutes les forces appliquées aux divers nœuds de cette figure forme un système de couples liés.

D'où, en écrivant en vertu du théorème IV, que le viriel total de ces deux couples est nul, on a la relation suivante :

$$\Sigma(\pm ab) = 0 ,$$

dans laquelle le signe de chacun de ses termes sera celui des deux forces opposées appliquées aux extrémités de l'un quelconque des deux côtés a , b figurés dans le terme considéré.

Application de cette propriété au calcul d'un système articulé intérieurement hyperstatique. Considérons un système articulé extérieurement isostatique à lignes surabondantes; concevons qu'on supprime toutes les barres surabondantes de ce système et qu'on applique aux extrémités A et B d'une de ces barres supprimées deux forces répulsives égales de valeur commune F. Désignons par (S) ce système articulé sans lignes surabondantes librement dilatable, par f la longueur de la barre AB et par t_k celle d'une barre quelconque du système (S). Soit T_k la tension produite dans la barre t_k sous l'action des forces répulsives F.

Cela étant, comme on sait que le polygone des forces de CREMONA correspondant aux forces F et aux tensions T_k est un polygone réciproque de la partie du système articulé (S) seul influencé par les forces F, on a, en vertu de la propriété ci-dessus,

$$Ff - \Sigma T_k t_k = 0 .$$

A présent, si l'on fait subir aux longueurs f et t_k des variations ou dilatations virtuelles δf et δt_k , on obtient, par une différentiation de la relation ci-dessus, la formule suivante :

$$T\delta f - \Sigma T_k \delta t_k = 0$$

qu'on applique fréquemment au calcul du système articulé hyperstatique ci-dessus.

2. — *Démonstration mécanique des théorèmes géométriques de CARNOT et de MASCHERONI.* Soit un tétraèdre quelconque $SABC$ (fig. 1); désignons les arêtes du trièdre S par a, b, c

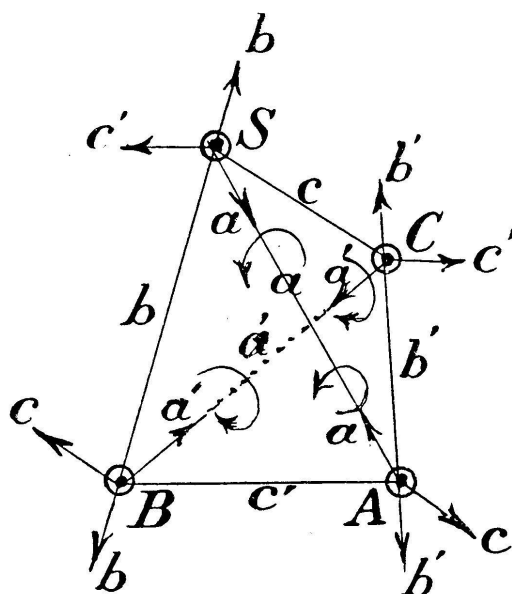


Fig. 1

et les arêtes qui leur sont respectivement opposées par a', b', c' , et par la notation (c, c') l'angle formé par les arêtes c et c' . Démontrons au moyen du viriel la relation suivante de CARNOT :

$$a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2 - 2cc' \cos (c, c') = 0 .$$

En effet, il est aisé de voir que cette relation n'est autre que celle qu'on obtient en égalant à zéro, d'après le théorème IV, la somme algébrique des viriels de divers couples liés formés par l'ensemble du système de trois forces concourantes en équilibre, appliquées dans la figure aux sommets de ce tétraèdre et ayant pour sens celui indiqué par des flèches sur la figure, et pour valeurs et directions les mêmes que celles des arêtes désignées par les mêmes lettres que ces forces.

On vérifie que les trois forces appliquées à chaque sommet sont en équilibre, en remarquant que les arêtes désignées par les mêmes lettres que ces trois forces forment dans la figure un triangle fermé (considéré comme polygone des forces) ayant pour sens celui des forces.

Il convient de rappeler que les forces d'un couple lié rec-

tiligne sont $+$ ou $-$ selon qu'elles se repoussent ou elles s'attirent.

A présent, passons à la démonstration de la relation suivante de MASCHERONI

$$a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - \dots - 2bc \cos(b, c) - 2bd \cos(b, d) \\ - 2be \cos(b, e) - \dots = 0,$$

dans laquelle a, b, c, d, e, \dots désignent respectivement les côtés AB, BC, CD, ... (fig. 2) d'un polygone quelconque

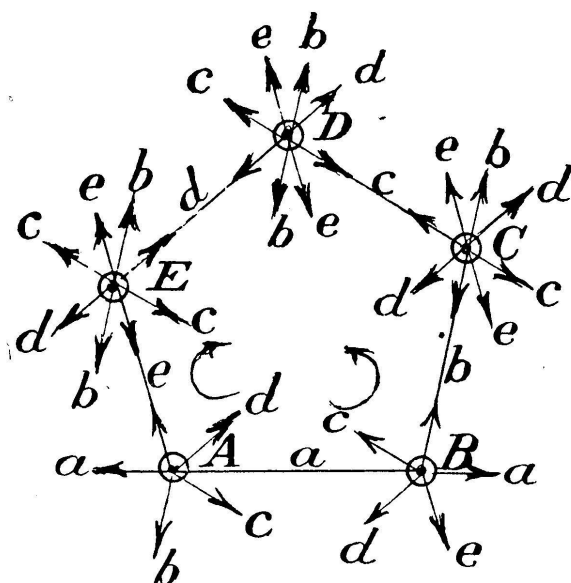


Fig.2

ABCD. En effet, appliquons aux sommets de ce polygone les systèmes de forces en équilibre suivants : Au sommet A le système de forces a, b, c, d, \dots ayant pour polygone fermé de forces le polygone ABCD. Au sommet B, même système de forces changé de sens. Quant à chacun des sommets C, D, E, ..., nous appliquerons un même système de forces formé par l'ensemble de couples de deux forces égales et directement opposées ayant mêmes directions et valeurs que celles de tous les côtés de ce polygone, sauf le côté a .

En remarquant que le système de forces appliquées à chaque sommet est en équilibre et que leur ensemble forme un système de couples liés, il suffit d'écrire, en vertu du

théorème IV, que la somme algébrique des viriels de ce couple est nulle, pour avoir la relation ci-dessus.

Remarque. Un angle quelconque, par exemple tel que (b, d) , figurant dans la relation ci-dessus, est l'angle formé par le côté d avec le prolongement de b .

3. — *Détermination directe du travail virtuel total des forces extérieures et intérieures dans un système de points matériels.*

Considérons un système quelconque de points matériels $A, B, C, \dots M, N, \dots$ (fig. 3) assujettis à des liaisons sans frottement et dont chacun est en équilibre sous l'action des forces extérieures et intérieures qui les sollicitent.

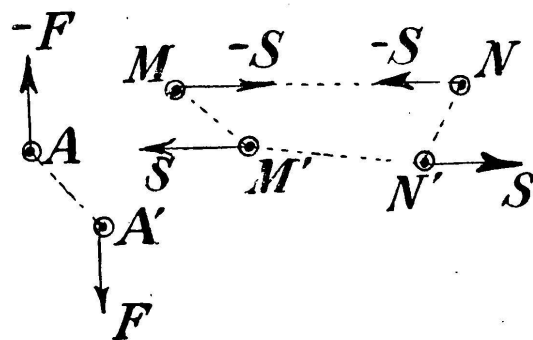


Fig. 3

Désignons par F la valeur de la force extérieure appliquée à un point quelconque A de ce système et par S la valeur commune des deux forces intérieures (actions mutuelles) égales et directement opposées qui se développent par deux points quelconques M et N de ce système (S sera considéré $+$ ou $-$ selon qu'il s'agit des forces répulsives ou attractives) et par s la valeur absolue de la distance MN entre ces deux points.

Faisons subir aux points de ce système des déplacements virtuels quelconques. Soient AA' , MM' , NN' les déplacements imprimés aux points A, M, N . Supposons que toutes les forces F et S se soient déplacées en même temps que leurs points d'applications aux nouveaux points A', M', N' .

Enfin, appliquons à tous les points primitifs A, M, N , les forces primitives F et S changées de sens.

Il en résulte que l'ensemble de toutes les forces ainsi obtenues ($-F$ en A), (F en A'), ($-S$ en M et N) et (S en M' et N') forment les trois systèmes de couples liés suivants : $F(A, A')$, $-S(M, N)$ et $+S(M', N')$. Le premier de ces couples a pour viriel :

$$+ F \cdot AA' \cos \omega = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z ,$$

et les deux autres couples ont aussi pour viriels

$$- Ss \quad \text{et} \quad + S(s + \delta s) .$$

En totalisant ces viriels et en égalant à zéro leur somme, on aura :

$$T = \Sigma X\delta x + \Sigma Y\delta y + \Sigma Z\delta z + \Sigma S\delta s = 0 . \quad (3)$$

4. — *Etablissement de l'expression ayant pour différentielle totale celle du travail virtuel.* Considérons le même système ci-dessus de points matériels. Comme toutes les forces concourantes extérieures et intérieures appliquées à chacun de ces points sont en équilibre, leur viriel total est nul, en vertu de la remarque du corollaire I, d'où l'expression suivante cherchée du viriel :

$$V = \Sigma Xx + \Sigma Yy + \Sigma Zz + \Sigma Ss = 0$$

ayant pour différentielle totale l'équation (3) du travail virtuel.
