Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1918)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA REPRÉSENTATION PROPORTIONNELLE EN MATIÈRE ÉLECTORALE

Autor: Pólya, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18043

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LA REPRÉSENTATION PROPORTIONNELLE EN MATIÈRE ÉLECTORALE

PAR

G. Pólya (Zurich).

Dans plusieurs périodiques non mathématiques[1], j'ai essayé de mettre en contact l'analyse mathématique avec l'énorme diversité des opinions émises sur la question de la représentation proportionnelle en matière électorale. La partie la plus intéressante de la recherche est, me semble-t-il : trouver, dans une littérature de controverse qui s'éloigne beaucoup de l'exposition et des sujets mathématiques habituels, des principes tangibles, des faits susceptibles d'une explication exacte et les « mettre en équation ». Dans les travaux cités j'ai énoncé plusieurs résultats mathématiques. Je les ai vérifiés expérimentalement par des exemples, j'ai tâché de les rapprocher du bon sens sans l'aide des formules, mais j'ai dû omettre les démonstrations. Dans les lignes suivantes je donnerai l'analyse exacte, une analyse très élémentaire d'ailleurs, mais qui ne sera peut-être pas dépourvue d'un certain intérêt pour quelques lecteurs.

1. — *Notations*. Soient A, B, C,... L les nombres de suffrages obtenus par les listes en présence. Soit S la somme totale des suffrages exprimés

$$A + B + C + \ldots + L = S . \qquad (1)$$

Soit s le nombre des sièges à répartir. En partageant s unités

---

[1] *Schweiz. Zentralblatt für Staats- und Gemeindeverwaltung*, 1919, N° 1 ; *Journal de statistique suisse*, 1918, N° 4 ; *Wissen und Leben*, N^{os} de janvier et février 1919. *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* (sous presse).

arbitrairement divisibles proportionnellement aux nombres A, B, C,... L, on obtient les « parts exactes »

$$a = \frac{As}{S}, \quad b = \frac{Bs}{S}, \quad \ldots \quad l = \frac{Ls}{S}.$$

On a

$$a + b + c + \ldots + l = s. \tag{2}$$

Les parts exactes a, b, c, ... l ne sont pas en général des nombres entiers. Donc si l'on décerne aux diverses listes respectivement α, β, γ, ... λ sièges, on commet inévitablement des erreurs. Les erreurs commises sont respectivement $\alpha - a$, $\beta - b$, ... $\lambda - l$ pour les différentes listes et $\frac{\alpha - a}{A}$, $\frac{\beta - b}{B}$, ... $\frac{\lambda - l}{L}$ pour les électeurs des différentes listes. S'il y a des erreurs, il y en a toujours des positives et des négatives, la somme de toutes les erreurs étant

$$\begin{aligned} &\alpha - a + \beta - b + \ldots + \lambda - l \\ &= A\frac{\alpha - a}{A} + B\frac{\beta - b}{B} + \ldots + L\frac{\lambda - l}{L} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

On a proposé un très grand nombre et appliqué effectivement un nombre considérable de systèmes différents pour effectuer la répartition des sièges, c'est-à-dire pour déterminer les nombres entiers α, β, γ, ... λ en connaissant A, B, C, ... L. On peut poser, à priori, certaines conditions très plausibles, que tout système doit remplir pour être admissible. Premièrement, si l'on a

$$A \geqq B \geqq C \geqq \ldots \geqq L,$$

chaque système raisonnable doit donner

$$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma \geqq \ldots \geqq \lambda.$$

Remarquons, en second lieu, que chaque règle doit devenir indéterminée en certains cas particuliers, par exemple si le nombre s est impair et s'il n'y a que deux listes en présence, les deux ayant obtenu le même nombre de suffrages. Pour qu'un système de répartition soit admissible, il faut que ces cas d'indétermination soient exceptionnels. Cette condition sera précisée plus loin. Enfin les entiers α, β, γ, ... λ doivent « s'approcher » autant que possible des parts exactes

a, b, c, ... l ou plutôt les erreurs commises doivent être « les plus petites possible ». Cette condition peut être précisée de manières très diverses.

2. — *Traitement égal des partis.* Considérons d'abord les erreurs commises pour chaque parti. Quelle est la répartition les rendant les plus petites possible ? Le problème est indéterminé. En effet, si des erreurs d'observation étaient en question, nous aurions, après tant de recherches théoriques et expérimentales, sinon des arguments absolument décisifs, du moins quelques bonnes raisons d'appliquer la méthode des moindres carrés. Il s'agit, dans notre cas, d'erreurs d'ordre juridique, et à ma connaissance on n'a proposé jusqu'ici que des raisons de sentiment qui parlent plutôt en faveur de la méthode des moindres carrés qu'en celle d'une autre méthode quelconque. Nous allons essayer plusieurs méthodes à la fois.

Problème. — *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction figurée par une courbe convexe,* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ *pour* $x \gtrless 0$. *Etant donné les nombres positifs* a, b, c, ... l, *satisfaisant à* (2), *trouver des entiers non-négatifs* α, β, γ, ... λ *satisfaisant à* (3) *tels que la somme* $\varphi(\alpha - a) + \varphi(\beta - b) + \ldots + \varphi(\lambda - l)$ *soit la plus petite possible.*

En posant, par exemple, $\varphi(x) = |x|^{\alpha}$, $\alpha > 1$, on cherche la solution de notre problème de répartition d'après la méthode « des moindres puissances $\alpha^{-\text{mes}}$ ». On écrit la somme en question comme suit :

$$\begin{aligned}
&\varphi(\alpha - a) + \varphi(\beta - b) + \ldots + \varphi(\lambda - l) \\
&= \varphi(-a) + \varphi(-b) + \ldots \varphi(-l) \\
&+ \big((\varphi(1-a) - \varphi(-a)\big) + \big(\varphi(2-a) - \varphi(1-a)\big) \\
&+ \ldots + \big(\varphi(\alpha - a) - \varphi(\alpha - 1 - a)\big) \\
&+ \big(\varphi(1-b) - \varphi(-b)\big) + \big(\varphi(2-b) - \varphi(1-b)\big) \\
&+ \ldots + \big(\varphi(\beta - b) - \varphi(\beta - 1 - b)\big) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \big(\varphi(1-l) - \varphi(-l)\big) + \big(\varphi(2-l) - \varphi(1-l)\big) \\
&+ \ldots + \big(\varphi(\lambda - l) - \varphi(\lambda - 1 - l)\big) .
\end{aligned} \tag{4}$$

Désignons le nombre des partis concurrents par p. Le second membre de l'égalité (4) comprend $p+1$ lignes. La $0^{-\text{me}}$ ligne se compose de p termes, indépendants du choix de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, c'est la longueur des p lignes suivantes qui en dépend. La première ligne[1] correspondant au premier parti, comprend α termes, la seconde ligne β termes et ainsi de suite chaque ligne comprend autant de termes qu'il y a de sièges attribués au parti correspondant.

Quelle est la grandeur relative de ces termes dans les p dernières lignes ? L'hypothèse que la courbe $y = \varphi(x)$ est convexe (vue d'en bas) entraîne[2] que la fonction $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ augmente constamment avec x. Donc la réponse à la question : quel est le plus grand des deux termes donnés ? est (l'hypothèse en question remplie) indépendante de φ et ne dépend que des arguments. On voit facilement que le problème, rendre minimum le premier membre (ou le second) de (4) revient à ceci : choisir dans le tableau suivant, à p lignes et à une infinité de colonnes,

$$\begin{array}{l} 1-a,\ 2-a,\ 3-a, \ldots\ [a]-a,\ [a]+1-a \ldots \\ 1-b;\ 2-b,\ 3-b, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1-l,\ 2-l,\ 3-l, \ldots \end{array} \tag{5}$$

α nombres de la première ligne, β de la seconde, ... λ de la p^{me}, de manière que les $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda$ nombres choisis soient les s plus petits nombres de tout le tableau.

Dans la première ligne il y a $[a]$ (c'est-à-dire partie entière de a) nombres négatifs, voir $1-a$, $2-a$, ... $[a]-a$, le suivant $[a]+1-a$ est ≤ 1 et les suivants sont > 1. On constate que dans tout le tableau (5) il y a

$$[a]+[b]+[c]+\ldots+[l] \leq s\ ,$$

[1] Cette ligne, comme les suivantes, a été partagée en deux à cause des difficultés d'impression.

[2] Pour les notions analytiques utilisées, voir JENSEN, *Acta Mathematica*, t. 30 (1906), p. 175-193.

nombres non-positifs et p nombres compris entre 0 et 1. C'est entre ces $[a] + [b] + [c] + \ldots + [l] + p$ nombres que nous devons chercher les s plus petits du tableau (5), parce que, évidemment,

$$s < [a] + 1 + [b] + 1 + \ldots + [l] + 1 .$$

En résumé, pour rendre minimum la somme

$$\varphi(\alpha - a) + \varphi(\beta - b) + \ldots + \varphi(\lambda - l)$$

on a la règle suivante : *attribuer d'abord aux partis respectivement* [a], [b], [c], ... [l] *sièges; s'il reste encore des sièges disponibles* (ce qui sera généralement le cas), *attribuer le complément aux plus grandes des fractions* a — [a], b — [b], c — [c], ... l — [l]. C'est la *règle des plus grands restes,* comme on dit couramment. La règle des plus grands restes ne peut être indéterminée que dans le cas où deux des nombres $a - [a]$, $b - [b]$, ... $l - [l]$ deviennent égaux.

Le résultat est qu'une infinité des méthodes, par exemple celle des moindres carrés, celle des moindres bicarrés, etc., appliquées aux erreurs relatives aux listes préconisent la même répartition des sièges. Ce résultat peut être généralisé encore, en élargissant les conditions auxquelles la fonction $\varphi(x)$ est assujettie.

Je ne veux pas formuler les conditions les plus générales ; on voit par exemple que la démonstration s'applique presque sans changements à la fonction $\varphi(x) = |x|$, ce qui n'est pas sans intérêt.

Le problème de répartir les sièges de telle manière que le maximum des écarts $|\alpha - a|$, $|\beta - b|$, .., $|\lambda - l|$ soit aussi petit que possible, conduit aussi à la règle des plus grands restes. J'omets la démonstration, parce qu'elle est facile et bien connue.

3. — *Traitement égal des électeurs.* D'après la nature de la question, ce ne sont pas les erreurs relatives aux partis, mais celles relatives aux électeurs qui importent. En essayant d'appliquer à ces erreurs-là les différentes mé-

thodes imaginables, on est amené à rendre minimum l'expression

$$A\varphi\left(\frac{\alpha - a}{A}\right) + B\varphi\left(\frac{\beta - b}{B}\right) + \dots + L\varphi\left(\frac{\lambda - l}{L}\right)$$

par le choix convenable des entiers α, β, γ, ... λ de la somme donnée s. En remplaçant $S\varphi\left(\frac{x}{S}\right)$ par $\varphi(x)$, on peut aussi envisager l'expression suivante

$$a\varphi\left(\frac{\alpha - a}{a}\right) + b\varphi\left(\frac{\beta - b}{b}\right) + \dots + l\varphi\left(\frac{\lambda - l}{l}\right).$$

C'est cette dernière que je rendrai minimum en admettant que la fonction φ remplisse les conditions énoncées auparavant.

On a l'identité analogue à (4)

$$\begin{aligned}
&a\varphi\left(\frac{\alpha}{a} - 1\right) + b\varphi\left(\frac{\beta}{b} - 1\right) + \dots + l\varphi\left(\frac{\lambda}{l} - 1\right) \\
&\quad = a\varphi(-1) + b\varphi(-1) + \dots + l\varphi(-1) \\
&+ a\left(\varphi\left(\frac{1}{a} - 1\right) - \varphi(-1)\right) + a\left(\varphi\left(\frac{2}{a} - 1\right) - \varphi\left(\frac{1}{a} - 1\right)\right) \\
&\qquad + \dots + a\left(\varphi\left(\frac{\alpha}{a} - 1\right) - \varphi\left(\frac{\alpha - 1}{a} - 1\right)\right) \\
&+ b\left(\varphi\left(\frac{1}{b} - 1\right) - \varphi(-1)\right) + b\left(\varphi\left(\frac{2}{b} - 1\right) - \varphi\left(\frac{1}{b} - 1\right)\right) \\
&\qquad + \dots + b\left(\varphi\left(\frac{\beta}{b} - 1\right) - \varphi\left(\frac{\beta - 1}{b} - 1\right)\right) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ l\left(\varphi\left(\frac{1}{l} - 1\right) - \varphi(-1)\right) + l\left(\varphi\left(\frac{2}{l} - 1\right) - \varphi\left(\frac{1}{l} - 1\right)\right) \\
&\qquad + \dots + l\left(\varphi\left(\frac{\lambda}{l} - 1\right) - \varphi\left(\frac{\lambda - 1}{l} - 1\right)\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

La 0me ligne du membre droit donne $s\varphi(-1)$. Les lignes suivantes[1] sont puisées du tableau

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\varphi\left(\frac{1}{a}-1\right)-\varphi(-1)}{\frac{1}{a}}, \quad \dfrac{\varphi\left(\frac{2}{a}-1\right)-\varphi\left(\frac{1}{a}-1\right)}{\frac{1}{a}}, \\
\qquad\qquad \ldots \dfrac{\varphi\left(\frac{n}{b}-1\right)-\varphi\left(\frac{n-1}{a}-1\right)}{\frac{1}{a}}, \ldots \\
\dfrac{\varphi\left(\frac{1}{b}-1\right)-\varphi(-1)}{\frac{1}{b}}, \quad \dfrac{\varphi\left(\frac{2}{b}-1\right)-\varphi\left(\frac{1}{b}-1\right)}{\frac{1}{b}}, \\
\qquad\qquad \ldots \dfrac{\varphi\left(\frac{n}{b}-1\right)-\varphi\left(\frac{n-1}{b}-1\right)}{\frac{1}{b}}, \ldots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\varphi\left(\frac{1}{l}-1\right)-\varphi(-1)}{\frac{1}{l}}, \quad \dfrac{\varphi\left(\frac{2}{l}-1\right)-\varphi\left(\frac{1}{l}-1\right)}{\frac{1}{l}}, \\
\qquad\qquad \ldots \dfrac{\varphi\left(\frac{n}{l}-1\right)-\varphi\left(\frac{n-1}{l}-1\right)}{\frac{1}{l}}, \ldots
\end{array} \tag{7}$$

où on posera $n = 1, 2, 3, \ldots$ La courbe $y = \varphi(x)$ étant convexe, on a, par de simples considérations géométriques,

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} < \frac{\varphi(\mathrm{T}+h)-\varphi(\mathrm{T})}{h} < \frac{\varphi(\mathrm{T}+\mathrm{H})-\varphi(\mathrm{T})}{\mathrm{H}} \tag{8}$$

pourvu qu'on ait $t < \mathrm{T}$, $0 < h < \mathrm{H}$. La première des inégalités (8) montre que dans chaque ligne du tableau (7) les quantités sont rangées par ordre de leur valeur algébrique croissante. On rend donc minimum l'expression (6) *en choisissant dans le tableau* (7) *les* s *quantités les plus petites en valeur*

[1] Sont partagées à cause de l'impression.

algébrique, et en attribuant à chaque parti autant de sièges qu'il y a de quantités parmi ces s *prises dans la ligne correspondante du tableau* (7).

En appliquant cette règle à la fonction $\varphi(x) = |x|$ à laquelle la démonstration s'applique aussi, avec de légers changements, on retrouve la règle des plus grands restes. Ce qui est évident d'ailleurs d'après l'identité

$$a\left|\frac{\alpha - a}{a}\right| + b\left|\frac{\beta - b}{b}\right| + \dots + l\left|\frac{\lambda - l}{l}\right| = |\alpha - a| + |\beta - b| + \dots + |\lambda - l| .$$

Le lecteur est prié d'appliquer aussi la règle à la fonction $\varphi(x) = x^2$. Il retrouvera ainsi la règle des moindres carrés donnée par M. Sainte-Laguë dans un travail[1] qui constitue un réel progrès de la théorie de la représentation proportionnelle, autant que cette théorie est mathématique. C'est la méthode de M. Sainte-Laguë que nous avons généralisée dans l'analyse précédente. En appliquant la règle à d'autres fonctions, par exemple à $\varphi(x) = |x|^3$, x^4, $|x|^5$, ... l'on trouvera toujours d'autres méthodes de répartition de sièges[2].

On peut faire voir que les méthodes ainsi trouvées sont réellement différentes en recherchant leurs cas d'indétermination. Si notre règle ne peut pas décider à qui attribuer un siège, au premier parti ou au second, une relation de la forme

$$a\left(\varphi\left(\frac{\alpha}{a} - 1\right) - \varphi\left(\frac{\alpha - 1}{a} - 1\right)\right) = b\left(\varphi\left(\frac{\beta}{b} - 1\right) - \varphi\left(\frac{\beta - 1}{b} - 1\right)\right) \quad (9)$$

doit avoir lieu. Considérons les entiers α, β comme donnés et les quantités a, b comme variables. D'après (8) le membre gauche est une fonction croissante de $\frac{1}{a}$, donc une fonction décroissante de a. Une remarque analogue a lieu concernant le membre droit. Il s'en suit que la courbe représentative

[1] Voir *Annales de l'Ecole Normale*, 3e série, tome 27 (1910), p. 529-542.

[2] Ces différentes méthodes pour mesurer la petitesse des erreurs peuvent être envisagées aussi à propos d'autres questions. Par exemple le polynôme qui s'écarte le moins possible du zéro a une signification qui varie avec la notion de l'écart. On obtient différents polynômes d'un degré donné.

de la relation (9) dans le plan a, b ne peut rencontrer qu'une fois une droite parallèle à l'axe des a ou à l'axe des b. Cette courbe sera différente quand on remplace $\varphi(x)$ par les fonctions différentes $|x|$, x^2, $|x|^3$, x^4, etc.

Voici encore une remarque qui me paraît importante. Supposons qu'on ait

$$A \geqq B \geqq C \geqq \ldots \geqq L$$

ou ce qui revient au même,

$$a \geqq b \geqq c \geqq \ldots \geqq l .$$

Il suit de ces inégalités, en vertu de (8), qu'en parcourant de haut en bas une colonne quelconque du tableau (7), on rencontre des quantités toujours plus grandes. Si donc, sur les s quantités plus petites contenues dans le tableau (7) il y a α appartenant à la 1re, β appartenant à la 2me, ... λ appartenant à $p$me ligne, on a nécessairement

$$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma \geqq \ldots \geqq \lambda .$$

Donc toutes les méthodes de répartition considérées remplissent une condition évidente, qu'on a posée à priori.

On peut évidemment choisir entre une infinité de méthodes pour mesurer la petitesse des erreurs et l'on peut se poser une infinité de problèmes de minimum. Mais le choix n'est pas tout à fait arbitraire. Les problèmes doivent être résolubles et les solutions doivent remplir certaines conditions. C'est ce que nous avons montré pour les problèmes traités. On verra plus loin que d'autres problèmes de minimum, mentionnés toutefois par plusieurs auteurs, ne remplissent pas les conditions posées ci-dessus. Il est intéressant de constater que différentes méthodes, donnant des résultats divergents quand on les applique aux erreurs relatives aux électeurs, convergent au même point quand on les applique à celles relatives aux partis.

4. *Rapprochement des deux points de vue.* Nous avons vu que contrairement à certaines assertions un peu hâtivement émises, la règle des plus grands restes traite également tout aussi bien les électeurs que les partis, en mesurant la

petitesse des erreurs par une mesure simple : la somme de leur valeur absolue. Est-ce que ce système est le seul qui rapproche ces deux points de vue? Nous allons démontrer qu'il en est ainsi, sous des conditions très larges. Nous supposerons seulement que la petitesse des erreurs relatives aux partis soit mesurée par une expression de la forme

$$\varphi(\alpha - a) + \varphi(\beta - b) + \ldots + \varphi(\lambda - l) \tag{10}$$

où φ désigne une fonction continue, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ pour $x \gtrless 0$. Soit r un nombre rationnel, différent de zéro et n un entier positif. On choisira successivement deux entiers positifs, α et β satisfaisant aux inégalités

$$n\alpha - r > 0 \qquad n\alpha - r < n\alpha + \beta ,$$

puis deux entiers positifs, A et B satisfaisant à l'égalité

$$\frac{n\alpha - r}{n\alpha + \beta} = \frac{n}{n + \frac{B}{A}} . \tag{11}$$

C'est seulement le quotient B : A qui est déterminé par (11). C'est avantageux de se figurer A et B grands par rapport à α et β.

Supposons deux élections. A la première, il y a $n + 1$ partis concurrents qui ont obtenu respectivement

$$A, A, A, \ldots A, B$$

suffrages et auxquels une loi quelconque attribue respectivement

$$\alpha, \alpha, \alpha, \ldots \alpha, \beta$$

sièges. A la seconde il y a deux partis obtenant respectivement nA et B suffrages et $n\alpha$ et β sièges. Les erreurs commises au détriment ou au profit des électeurs sont absolument les mêmes dans les deux cas. En calculant à l'aide de (11) les erreurs commises pour chaque parti, on voit que l'expression (10) se réduit à

$$n\varphi\left(\frac{r}{n}\right) + \varphi\left(\beta - \frac{n\alpha + \beta}{nA + B} B\right)$$

dans le premier cas et à

$$\varphi(r) + \varphi\left(\beta - \frac{n\alpha + \beta}{n\mathrm{A} + \mathrm{B}}\mathrm{B}\right)$$

dans le second cas. Si l'évaluation des erreurs doit être la même en envisageant les erreurs relatives aux partis et celles relatives aux électeurs, les deux dernières expressions doivent être égales, ce qui donne

$$\varphi(r) = n\varphi\left(\frac{r}{n}\right). \tag{12}$$

En vertu de ce qui a été dit, le nombre rationnel r et l'entier positif n peuvent être quelconques. L'équation (12) valable dans cette étendue entraîne, suivant des raisonnements classiques, que $\varphi(x)$ est égal à une fonction linéaire et homogène pour les valeurs positives de x. Une conséquence analogue a lieu pour $x < 0$. On a donc

$$\varphi(x) = c_1 |x| \text{ pour } x > 0$$
$$\varphi(x) = c_2 |x| \text{ pour } x < 0 ,$$

c_1 et c_2 étant deux constantes positives. On peut réunir les deux formules en une seule en écrivant

$$\varphi(x) = \frac{c_1 + c_2}{2}|x| + \frac{c_1 - c_2}{2}x .$$

La somme (10) se réduit à

$$\begin{aligned}\frac{c_1 + c_2}{2}(|\alpha - a| + \ldots + |\lambda - l|) + \frac{c_1 - c_2}{2}(\alpha - a + \ldots + \lambda - l)\\ = \frac{c_1 + c_2}{2}(|\alpha - a| + \ldots + |\lambda - l|)\end{aligned} \tag{13}$$

en vertu de (3). Comme nous avons vu, c'est la règle des plus grands restes qui rend minimum le membre droit de (13) c. q. f. d.

5. — *Aspect géométrique de la question.* Je suppose qu'il y a trois listes en présence, dont les parties exactes sont x, y, z et qu'il y a s sièges à distribuer. On a

$$x + y + z = s , \qquad x > 0,\ y > 0,\ z > 0 . \tag{14}$$

Si l'on abaisse d'un point intérieur d'un triangle équila-

téral de hauteur s trois perpendiculaires sur les trois côtés de longueur x, y, z respectivement, les nombres x, y, z satisfont aux relations (14). (Pour démontrer on joint le point en question aux trois sommets du triangle et on considère l'aire totale des trois triangles partiels obtenus.) On peut donc représenter toutes les répartitions de suffrage essentiellement différentes entre 3 partis par l'ensemble des points à coordonnées rationnelles x, y, z à l'intérieur d'un triangle de référence équilatéral. Les nombres des suffrages obtenus sont les coordonnées homogènes du point représentatif. Les répartitions des suffrages entre deux partis concurrents peuvent être représentées sur un segment de droite, celles entre 4 partis par les points à l'intérieur d'un tétraèdre régulier, celles entre p partis dans l'espace à $p - 1$ dimensions. J'envisagerai ici de préférence le cas $p = 3$.

Les différentes répartitions de sièges sont représentées par des points, dont toutes les trois coordonnées x, y, z sont des nombres entiers. Ils sont les sommets d'un réseau de triangles équilatéraux. Par exemple un sommet du triangle de référence correspond à l'attribution de tous les s sièges en question à un des partis.

Comment interpréter géométriquement les diverses règles de répartition ? Une règle quelconque fait correspondre à chaque point, représentant une répartition déterminée des suffrages, un point, différent en général du premier, représentant la distribution coordonnée des sièges. Il y a une infinité de répartitions de suffrages qui mènent à la même distribution de sièges. Leurs points représentatifs remplissent une aire, entourant le point représentatif de la distribution correspondante de sièges.

Prenons par exemple la règle des plus grands restes qui est la plus simple. Soient x, y, z les coordonnées d'un point. Ce point représente le résultat d'un scrutin, où les forces numériques des électeurs de 3 listes en présence étaient dans le rapport $x : y : z$. Si les partis obtiennent α, β, γ sièges, ces trois entiers non-négatifs doivent rendre minimum l'expression

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 \tag{15}$$

d'après un théorème général précédemment démontré. (Le cas particulier qui nous intéresse momentanément fut déjà donné par M. SAINTE-LAGUË, l. c.). Or le carré de la distance des deux points x, y, z et α, β, γ est précisément les deux tiers de la somme (15), comme on le démontre facilement. Par conséquent, la règle des plus grands restes fait correspondre à un résultat de scrutin x, y, z le sommet le plus rapproché du réseau considéré ci-dessus. Les différents résultats de scrutin qui amènent la même distribution de sièges, sont représentés par des points plus rapprochés d'un certain sommet α, β, γ du réseau qu'ils ne sont à aucun autre et remplissent l'aire d'un hexagone régulier, dont le centre est α, β, γ. Les cas où la règle des plus grands restes devient illusoire sont situés sur les périphéries des hexagones et forment des lignes d'indétermination séparant les cellules qui entourent les points du réseau (voir fig. 1).

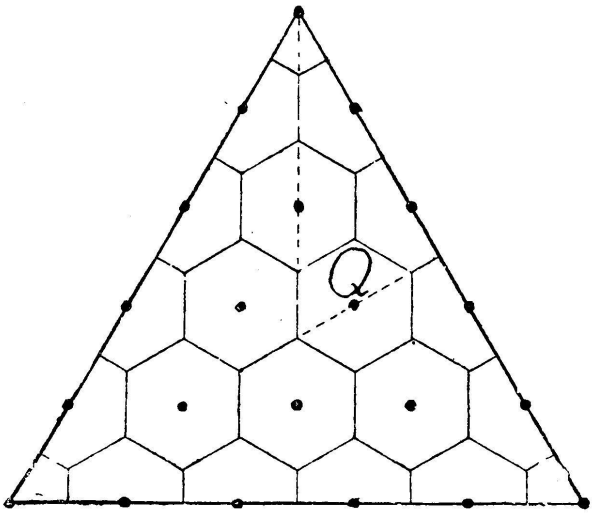

Fig. 1.

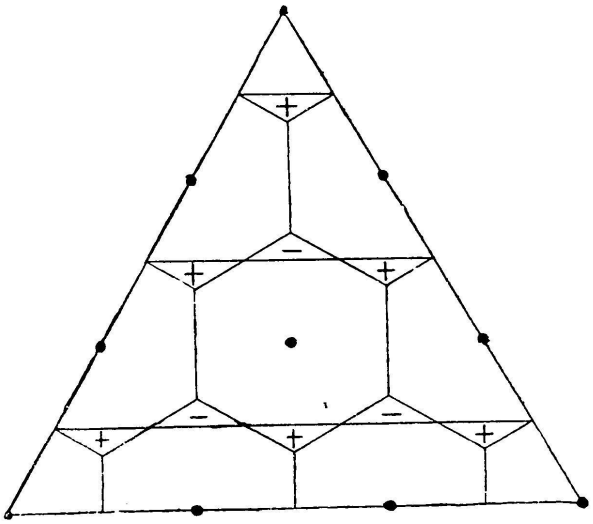

Fig. 2.

La règle des plus grands restes est la plus simple et la plus naturelle au point de vue géométrique comme elle l'est aussi au point de vue arithmétique. Les autres règles engendrent d'autres divisions du triangle de référence. Je ne peux ici que mentionner certaines propriétés. La règle bien connue d'HONDT est figurée par un amas de cellules qui ont toutes la même étendue. Entre les règles de répartition considérées jusqu'ici, il n'y en a que trois qui donnent naissance à des cellules à limites rectilignes : ce sont celles des

plus grands restes, de d'HONDT et de SAINTE-LAGUË. Les cellules hexagonales de ces deux dernières méthodes ne sont pas régulières. Les différentes méthodes que nous avons mises en relation avec le traitement égal des électeurs ont des lignes courbes d'indétermination (voir formule (9) et les explications qui s'y rattachent). La plupart des méthodes en usage pratique ne peuvent invoquer aucune raison théorique en leur faveur, mais elles dépendent toutes des opérations linéaires et les cellules de leur représentation graphique sont, par conséquent, limitées par des segments de droites.

M. MACQUART — dont les mérites pratiques pour la cause de la R. P. ne peuvent nullement être diminués par cette remarque — adresse à la règle des plus grands restes le reproche suivant[1] : en adoptant cette règle de répartition, il peut arriver qu'un parti A luttant deux fois de suite contre des adversaires B et C obtienne à la seconde élection une plus faible partie de sièges, quoique ayant une plus forte partie de suffrages. Il aurait pu adresser ce reproche à tous les systèmes imaginables de répartition proportionnelle. C'est impossible que toutes les lignes d'indétermination soient parallèles à un des côtés du triangle. On peut donc bien dépasser quelques-unes de ces lignes en se mouvant parallèlement à un des côtés du triangle ou même passer d'une cellule à une cellule voisine, appartenant à un sommet *moins élevé* du réseau en suivant une direction légèrement *ascendante*.

Notre représentation graphique peut élucider une quantité de paradoxes et réduire à leur juste valeur une foule d'objections semblables. Arrivons à des services plus importants qu'elle peut rendre.

6. — *Cas d'indétermination exceptionnels et non-exceptionnels.* Quand les points d'indétermination sont situés sur un nombre fini d'arcs simples (c'est-à-dire qui ne rencontrent qu'une fois une droite parallèle à un des côtés du triangle),

[1] Voir *Revue scientifique* (1905), II.

on pourra dire à bon droit que les cas d'indétermination sont exceptionnels. C'est dans ce sens qu'on peut affirmer que les méthodes de répartition examinées jusqu'ici ne donnent lieu qu'exceptionnellement à des indécisions. Tandis que si tous les points (rationnels) remplissant une surface sont des points d'indétermination, l'indécision n'est plus exceptionnelle et la règle doit être rejetée.

En admettant ce postulat, on doit rejeter la règle suivante : distribuer les sièges de manière que l'erreur relative à un électeur, la plus grande en valeur absolue soit la plus petite possible. Je dis, en effet, que cette règle sera indéterminée toutes les fois que s sièges étant à répartir, $s \geqq 6$, les parts exactes des trois partis en concurrence satisfont aux inégalités

$$x < \frac{1}{2}, \quad y > \frac{s}{3}, \quad z > \frac{s}{3}, \tag{16}$$

c'est-à-dire quand les points représentatifs se trouvent à l'intérieur d'un certain quadrilatère. Au lieu des erreurs commises pour chaque électeur, je considérerai comme auparavant les grandeurs $\frac{\alpha - x}{x}$, $\frac{\beta - y}{y}$, $\frac{\gamma - z}{z}$ qui leur sont proportionnelles et je les nommerai simplement « les erreurs ». La première des inégalités (16) entraîne

$$\frac{\alpha - x}{x} = \frac{\alpha}{x} - 1 > 1 \text{ pour } \alpha = 1, 2, 3, \ldots s.$$

En attribuant au parti ayant la part exacte x 0 sièges, on est sûr d'avoir atteint la limite inférieure de l'erreur maximale

$$\left| \frac{0 - x}{x} \right| = 1 .$$

Le nombre des sièges étant assez grand, on pourra trouver *de plusieurs manières* deux entiers β, γ satisfaisant aux relations

$$\beta + \gamma = s, \quad \beta \leqq \frac{2s}{3}, \quad \gamma \leqq \frac{2s}{3}. \tag{17}$$

En attribuant β sièges au parti à part exacte y, l'erreur

commise pour chaque électeur est en vertu de (16) (17)

$$-1 < \frac{\beta - y}{y} < \frac{\frac{2s}{3} - \frac{s}{3}}{\frac{s}{3}} = 1 .$$

On trouvera de même

$$\left| \frac{\gamma - z}{z} \right| < 1 .$$

C'est donc de *plusieurs manières* que l'erreur la plus grande en valeur absolue peut atteindre sa limite inférieure, c. q. f. d.

M. EQUER[1] a proposé de réduire à un minimum la différence entre l'électeur le plus et le moins favorisé. Cette différence est d'ailleurs égale à la somme des valeurs absolues de l'erreur positive et de l'erreur négative extrêmes. Malheureusement cette règle si plausible ne remplit pas non plus le postulat relatif aux exceptions, au moins quand il s'agit de quatre listes ou davantage. Représentons les différents rapports possibles entre les forces numériques de quatre partis par les points à l'intérieur d'un tétraèdre régulier. S'il y a 20 sièges à distribuer, la hauteur du tétraèdre sera de 20 unités de longueur. Considérons le point dont les distances aux 4 faces du tétraèdre sont respectivement

$$x = 1{,}8 \qquad y = 2{,}2 \qquad z = 7{,}6 \qquad t = 8{,}4 .$$

Ce point représente un scrutin où les forces des partis sont dans le rapport 18 : 22 : 76 : 84. On peut s'assurer par une discussion numérique que j'omets, qu'en donnant aux listes

2 2 7 9

ou bien

2 2 8 8

sièges respectivement, la différence dont M. EQUER parle sera la plus petite possible. En poursuivant la discussion, on pourra montrer que la règle de M. Equer sera en défaut

[1] Voir SAINTE-LAGUË, l. c., p. 535.

non seulement pour le point considéré, mais aussi pour tous les points à l'intérieur d'une sphère de rayon assez petit, décrite autour du point en question. D'après le sens du postulat énoncé, les points formant un ensemble de même dimension que la totalité des cas possibles, ne peuvent plus être considérés comme non-exceptionnels.

On pourrait aussi considérer le principe : rendre minimum l'erreur négative extrême relative à un électeur. Cette règle est impuissante de choisir entre les répartitions différentes tant qu'on a $s < p$ et engendre la méthode dite des « plus fortes fractions » quand $s \geqq p$ (s le nombre de sièges, p le nombre des partis comme auparavant)[1].

Il n'y a qu'une règle de cette sorte qui pour chaque combinaison de s et de p ne devient indéterminé qu'exceptionnellement. C'est la règle d'Hondt, qui tend à rendre minimum l'erreur *positive* extrême[2]. Ce que nous avons dit sert à justifier dans une certaine mesure le système d'Hondt et montre que bien qu'il y ait une infinité de principes de minimum possibles, on ne saurait en choisir un tout à fait au hasard.

7. *Le rôle des probabilités.* Les élections sont un jeu de hasard, comme on l'a dit souvent. *Est-ce que les chances du jeu sont égales pour tous les partis ?*

Je montrerai par un exemple simple comment on peut trouver ces chances. Envisageons le problème suivant :

Dans une circonscription il y a cinq sièges à distribuer, 3 partis qui se les disputent et la répartition se fait d'après les plus grands restes. Quelle est l'espérance mathématique d'une erreur en faveur du parti le plus fort, du parti moyen et du plus faible ?

Soient les parts exactes des partis en question x, y, z

$$x > y > z \,. \tag{18}$$

Les inégalités (18) délimitent la sixième partie du triangle de référence, un triangle rectangle aux angles de 90°, 60° et 30° (voir fig. 1). Il y a autant de cas possibles que de points

[1] Voir Sainte-Laguë, l. c., p. 535
[2] Voir Sainte-Laguë, l. c., p. 534.

rationnels dans le dit triangle rectangle. Je suppose que la probabilité de l'événement qu'un point choisi au hasard tombe dans un certain domaine est proportionnel à l'aire de celui-ci. Cette supposition est la plus simple, je l'ai justifiée en comparant ses conséquences à des données statistiques et elle peut en outre être fondée théoriquement[1]. Calculons par exemple la probabilité pour que le parti le plus fort et le parti moyen obtiennent chacun 2 sièges et que le plus faible en obtienne 1. C'est la probabilité pour qu'un point du triangle délimité par les inégalités (18) tombe dans la moitié supérieure de la cellule entourant le point Q (voir fig. 1). Elle est égale au quotient des aires de ces deux domaines, c'est-à-dire à $\frac{6}{25}$, comme on vérifie facilement. Des probabilités analogues sont réunies dans le tableau suivant :

Nombre de sièges obtenus par le parti le plus fort	moyen	le plus faible	Probabilité
5	0	0	$\frac{1}{25}$
4	1	0	$\frac{6}{25}$
3	2	0	$\frac{6}{25}$
3	1	1	$\frac{6}{25}$
2	2	1	$\frac{6}{25}$

Les trois partis obtiendront donc en moyenne respectivement

$$\frac{1.5 + 6.4 + 6.3 + 6.3 + 6.2}{25} = \frac{77}{25}$$

$$\frac{1.0 + 6.1 + 6.2 + 6.1 + 6.2}{25} = \frac{36}{25}$$

$$\frac{1.0 + 6.0 + 6.0 + 6.1 + 6.1}{25} = \frac{12}{25}$$

[1] Voir POINCARÉ, *Calcul de probabilités*, 2me édition, p. 123-126. La supposition adoptée par SAINTE-LAGUË, l. c., p. 541-542, est, à mon avis, incorrecte et en tous cas différente de celle adoptée ici. En admettant que les parties d'égale longueur du segment de droite qui représente les différents rapports de la force numérique des deux partis sont d'égale probabilité, le problème traité l. c. donne le résultat $\frac{1}{4}$. Voir pour une interprétation de l'hypothèse faite ici, mon travail cité de Zentralblatt.

sièges. La proportion moyenne des suffrages qu'ils obtiendront est donnée par les coordonnées du centre de gravité du triangle rectangle (18), c'est-à-dire par les nombres

$$\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{2}+\frac{5}{1}\right)=\frac{55}{18} \qquad \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{2}+0\right)=\frac{25}{18} \qquad \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}+0+0\right)=\frac{10}{18}$$

les trois sommets du triangle (18) ayant respectivement les coordonnées

$$\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}; \qquad \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0; \qquad \frac{5}{1}, 0, 0.$$

L'espérance mathématique d'une erreur en faveur d'un des partis est la différence de sa part moyenne en sièges et en suffrages. Les espérances mathématiques cherchées sont donc respectivement

$$\frac{77}{25}-\frac{55}{18}=+0{,}024, \qquad \frac{36}{25}-\frac{25}{18}=+0{,}051, \qquad \frac{12}{25}-\frac{10}{18}=-0{,}075.$$

C'est-à-dire la règle des plus grands restes avantage, au moins quand il s'agit de 5 sièges, les deux partis les plus forts au détriment du troisième, mais l'avantage est assez médiocre. Sur 100 élections ayant lieu dans des conditions analogues, la perte moyenne du parti le plus faible serait de 7 à 8 sièges. Les élections ordinaires ne sauraient déceler un effet si faible.

Ce n'est pas inutile de mentionner une interprétation géométrique des trois nombres calculés. Chacun d'eux est la moyenne d'autant de distances que le triangle (18) est partagé en parties différentes par les lignes d'indétermination. Considérons dans chaque cellule ou portion de cellule comprise dans le triangle (18) le centre de gravité de l'aire et un axe parallèle à la base du triangle de référence, passant par le sommet du réseau auquel la cellule ou la portion de cellule en question est rattachée. Nous compterons la distance du centre de gravité à cet axe positivement, si le centre de gravité est au-dessous et négativement s'il est au-dessus de l'axe. C'est de ces distances que l'espérance mathématique du plus grand parti est la moyenne, mais pas une moyenne arithmétique simple, parce que chaque distance a un « poids »

proportionnel à l'aire correspondante. Les espérances mathématiques des deux autres partis sont les moyennes des distances analogues, les axes en question devant être tracés parallèlement à un des deux autres côtés du triangle de référence. Dans le cas représenté par la fig. 1 ($s = 5$) le triangle rectangle (18) ne comprend que des portions de cellules. Au contraire, quand le nombre des sièges est grand ce sont les cellules entières qui sont en grande majorité. Mais le centre de gravité d'un hexagone régulier est précisément le sommet du réseau auquel l'hexagone est rattaché et la distance en question est par conséquent zéro. Ainsi pour $s = \infty$ l'espérance mathématique d'une erreur, commise en faveur de qui que ce soit, tend vers zéro. C'est-à-dire quand les circonscriptions sont assez grandes, le système des plus grands restes n'avantage aucun des partis concurrents d'une manière *systématique*. Voilà une conclusion d'une certaine valeur pratique et qui peut être soumise au contrôle de l'expérience électorale.

Voici encore un problème de cette nature :

Dans une circonscription il y avait originalement 3 partis qui se disputaient les s sièges à pourvoir; 2 de ces partis se décident de présenter une liste commune. Quelle est l'espérance mathématique d'un gain ensuite de cette réunion si le système des plus grands restes est en vigueur?

La situation originale des partis peut être figurée par un point (rationnel) quelconque $\mathfrak{P}$ du triangle de référence. Soient « y » et « z » les deux partis qui se réunissent. La force numérique du troisième parti restant invariable, menons par le point $\mathfrak{P}$ une parallèle à la base du triangle de référence. Cette parallèle rencontrera un des deux autres côtés, par exemple celui de droite, en un point $\mathfrak{P}'$. Envisageons les sommets du réseau Q et Q′ qui sont les plus rapprochés des points $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ respectivement. Q′ se trouve nécessairement sur le pourtour du triangle de référence. Je distingue 3 cas.

1. Q et Q′ sont à la même distance de la base. Il n'y a ni gain ni perte occasionnés par la réunion.

2. Q′ est plus rapproché de la base que Q. La différence

des distances ne peut être que d'une unité. Le parti « x » a perdu un siège ensuite de la réunion de ses deux adversaires.

3. Q′ est plus éloigné de la base que Q. L'éloignement est d'une unité et signifie un siège perdu pour les deux alliés.

Les régions remplies par les points $\mathcal{P}$ pour lesquelles le cas (2) se présente, sont désignées par le signe + dans la figure 2 (où $s = 3$), les régions correspondantes au cas (3) par le signe —. Désignons l'aire totale des premières par $\mathcal{R}_+$, celle des secondes par $\mathcal{R}_-$, l'aire du triangle de référence par $4s^2\Delta$. En considérant les aires qui jouent un rôle analogue par rapport à y et z que les aires $\mathcal{R}_+$ et $\mathcal{R}_-$ par rapport à x, on trouve facilement

$$3\mathcal{R}_+ = \frac{s(s+1)}{2}\Delta\,, \qquad 3\mathcal{R}_- = \frac{s(s-1)}{2}\Delta\,.$$

L'espérance mathématique d'un gain par l'alliance est

$$\frac{1\,.\,\mathcal{R}_+ - 1\,.\,\mathcal{R}_- + 0\,.\,(4s^2\Delta - \mathcal{R}_+ - \mathcal{R}_-)}{4s^2\Delta} = \frac{1}{12s}\,.$$

C'est-à-dire le système des plus grands restes, contrairement à certaines affirmations légèrement émises, favorise les alliances, mais dans une mesure si faible qui ne compte pas dans la pratique. Je remarque en passant que le résultat serait identique pour le *système Sainte-Laguë*.

Je renvoie pour de plus amples résultats numériques et pour des vérifications expérimentales à mon article paru dans le *Journal de statistique suisse*. C'est, à mon avis, l'étude des *chances* des différents systèmes qui constitue une véritable théorie mathématique de la représentation proportionnelle, une théorie qui peut rendre compte de certains faits observés et en prévoir d'autres. Je crois avoir suffisamment élucidé les principes de cette théorie par les calculs précédents. *Sapienti sat.* Le lecteur désireux d'approfondir cette théorie pourra envisager des distributions non-uniformes de probabilité ou des problèmes où interviennent

4 ou plusieurs partis. Il sera amené à généraliser pour des domaines « tétraédriques » à plusieurs dimensions la formule des trapèzes qui sert au calcul approché des intégrales et à étudier certaines divisions « semirégulières » de ces domaines. Il rencontrera une foule de jolis problèmes que je n'ai pas le loisir d'exposer ici. J'ai hâte d'arriver à un résultat qui me semble d'intérêt principal.

8. *Influence minimale de la division du pays en circonscriptions électorales sur le résultat total.* Je me permets d'extraire le passage suivant du travail plusieurs fois cité de M. Sainte-Laguë : « La répartition des sièges dans chaque circonscription peut sembler d'autant meilleure que les résultats globaux auxquels elle conduit sont plus voisins de ceux qu'aurait donnés la répartition directe des sièges faite aux listes globales obtenues en prenant les totaux des suffrages pour tout le pays.

Ce critérium semble difficile à appliquer, comme le montre l'exemple suivant :

Supposons qu'on ait seulement deux listes en présence A et B et que les deux listes réunissent à peu près le même nombre de suffrages dans tout le pays ; la règle la meilleure sera alors celle qui partagera par moitié dans chaque circonscription les sièges entre les deux listes A et B et cela pour aussi disproportionnés que soient les nombres des suffrages recueillis dans la circonscription considérée. »

Contrairement à ce que semble en penser M. Sainte-Laguë, je trouve que le dit critérium est, bien interprété, parfaitement clair, qu'il touche le point essentiel de la question et qu'il mène à un résultat déterminé. Pour le bien interpréter il ne faut pas oublier que c'est d'une *question de probabilité* qu'il s'agit. Voici d'ailleurs mon analyse qui est un peu abstraite mais très simple au fond.

Admettons qu'il s'agit de la répartition de s sièges entre p partis, dont les parts exactes sont désignées par $x_1, x_2, x_3, \ldots x_p$. On a

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p = s \,. \tag{19}$$

Considérons une règle quelconque de répartition. Cette règle fera correspondre au résultat du scrutin, exprimé par le rapport des nombres $x_1, x_2, x_3, \ldots x_p$ un certain entier ξ_1, fonction de ces nombres,

$$\xi_1 = f(x_2, x_3, x_4, \ldots x_p) ,$$

en désignant par ξ_1 le nombre des sièges attribués par la règle en question au parti dont la part exacte est $x_1 = s - x_2 - x_3 - \ldots - x_p$. La fonction f est une fonction symétrique de ses $p - 1$ variables et elle caractérise parfaitement la règle considérée, en tant qu'il ne s'agit que de p partis et de s sièges. En effet on attribuera respectivement

$$\xi_2 = f(x_1, x_3, x_4, \ldots x_p)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_p = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_{p-1})$$

sièges aux autres partis en présence. On a par conséquent

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_p = s . \tag{20}$$

La fonction f n'a que des valeurs entières non-négatives. Si la règle satisfait à un desideratum expliqué plus haut, les points de discontinuité de la fonction f seront situés sur certaines variétés $p - 2$-dimensionales.

Admettons que les parts exactes $x_1, x_2, x_3, \ldots x_p$ varient conformément à une loi de probabilité quelconque qui n'est assujettie qu'à cette unique condition : elle doit être la même pour tous les partis en question. Nous avons considéré précédemment la loi la plus simple de cette nature. Je désignerai par $\mathfrak{E}(\varphi)$ l'espérance mathématique d'une fonction quelconque φ des variables $x_1, x_2, \ldots x_p$ liées par la relation (19). Si la loi de probabilité envisagée est continue, $\mathfrak{E}(\varphi)$ s'exprime par une intégrale définie $p - 2$-tuple. On a par raison de symétrie

$$\mathfrak{E}(\xi_1 - x_1) = \mathfrak{E}(\xi_2 - x_2) \ldots = \mathfrak{E}(\xi_p - x_p)$$
$$= \frac{1}{p}\mathfrak{E}(\xi_1 - x_1 + \xi_2 - x_2 + \ldots + \xi_p - x_p) = 0$$

en vertu de (19) et (20). On a de même

$$\mathfrak{E}\left((\xi_1 - x_1)^2\right) = \mathfrak{E}\left((\xi_2 - x_2)^2\right) = \ldots = \mathfrak{E}\left((\xi_p - x_p)^2\right)$$
$$= \frac{1}{p}\mathfrak{E}\left((\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + \ldots + (\xi_p - x_p)^2\right) = b$$

en désignant par b une constante positive, dépendant du système de répartition et de la loi de probabilité qu'on envisage.

Envisageons un grand nombre n de circonscriptions, dans chacune desquelles il y a le même nombre de votants et le même nombre s de sièges à répartir. Le scrutin donne pour le premier des partis concurrents les parts exactes $x_1', x_1'', x_1''', \ldots x_1^{(n)}$ dans les différentes circonscriptions et la règle en question lui attribue $\xi_1', \xi_1'', \xi_1''', \ldots \xi_1^{(n)}$ sièges. Le critérium, formulé et contesté par M. Sainte-Laguë, exige évidemment que la différence

$$\xi_1' + \xi_1'' + \ldots + \xi_1^{(n)} - x_1' - x_1'' - \ldots - x_1^{(n)} \tag{21}$$

soit la plus petite possible *en général*. D'après un théorème de Laplace [1], la probabilité pour que l'écart (21) dépasse en valeur absolue une certaine limite h est

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{h}{\sqrt{2bn}}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \, .$$

Cette probabilité décroît évidemment avec b. Le principe en question exige donc que b soit le plus petit possible. Mais puisque

$$b = \frac{1}{p}\mathfrak{E}\left((\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + \ldots + (\xi_p - x_p)^2\right)$$

c'est la quantité $(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + \ldots + (\xi_p - x_p)^2$ dépendant de la règle de répartition adoptée qui doit devenir minimum. Ainsi le postulat que le système de répartition appliqué dans les diverses circonscriptions doit donner des résultats concordant autant que possible à la force numérique des partis dans tout le pays, préfère un certain pro-

[1] Voir *Théorie analytique des probabilités*, Livre II, N° 39.

blème de minimum aux autres, considérés auparavant. C'est le problème : rendre minimum la somme des carrés des erreurs relatives aux partis dont la solution est donnée par la règle des plus grands restes. C'est, à ce qu'il me paraît, la meilleure justification théorique de cette règle si simple et naturelle.

Zurich, avril 1919.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un problème inédit de E. Torricelli.

Au sujet de la publication de mon article sur *Les origines d'un problème inédit de E. Torricelli* (*L'Enseignement mathématique*, XXe année, 1918 et 1919, p. 245-268), je dois signaler que M. Michele Cipolla, professeur à l'Université de Catane, vient de faire paraître une importante étude sur le même problème.

Michele Cipolla. — I triangoli di Fermat e un problema di Torricelli, *Atti dell' Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania*, serie 5^a^, vol. XI, memoria XI.

Je n'ai eu connaissance de l'existence de ce mémoire qu'après la correction des épreuves de mise en pages de mon propre travail.

2 août 1919. Emile Turrière.

A propos d'une note de M. Paschoud.

Sur les équations transcendantes qui se présentent dans la théorie des tiges élastiques. (*L'Enseignement mathématique*, **20**, N° 4, 286, 1919).

J'ai lu avec intérêt la note de M. Paschoud qui fait remarquer que les racines de l'équation $\operatorname{tg} x \operatorname{cth} x = -1$ se déduisent immédiatement de celles de l'équation $\cos x \operatorname{ch} x = -1$. Ce fait, il est vrai, avait échappé à M. Emde et à moi. Mais, déjà en 1909, nous avons saisi l'occasion de signaler l'équivalence de l'équation $\cos x \operatorname{ch} x = 1$ à l'équation $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \pm 1$, dans l'*Archiv der Mathematik und Physik* (3), **15**, 372, à la suite d'une communication de M. Greenhill.

Berlin, 24 juillet 1919. E. Jahnke.