

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1918)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** Sur l'intégrale  $\int_0^h \frac{h^n \cdot e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} dh$   
**Autor:** Vaney, Félix / Paschoud, Maurice  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18041>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR L'INTÉGRALE $n! \int_0^h \frac{h^n e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} dh$ ,

PAR

Félix VANEY et Maurice PASCHOUD (Lausanne).

I. — Dans un mémoire inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France*, LAGUERRE (*Œuvres*, t. I, p. 415) considère l'intégrale

$$\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz$$

et il en déduit les propriétés fondamentales des polynômes  $U(x)$  d'HERMITE.

En partant de l'intégrale

$$n! \int_0^h \frac{h^n e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} dh,$$

on peut, par un calcul analogue à celui de LAGUERRE, établir les propriétés essentielles des polynômes  $P_n$  qu'il a obtenus dans un autre mémoire du même *Bulletin* (*Œuvres*, t. I, p. 434), et qu'il définit (*Œuvres*, t. I, p. 436) par la relation :

$$\frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = P_0 + P_1 \frac{h}{1!} + P_2 \frac{h^2}{2!} + \dots + P_n \frac{h^n}{n!} + \dots \quad (1)$$

où  $P_n$  a comme expression générale :

$$P_n(x) = n! \left[ 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1^2 \cdot 2^2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} x^3 + \dots \right]. \quad (2)$$

LAGUERRE indique les propriétés suivantes des polynômes  $P_n$ .

$$\int_{-\infty}^0 e^x P_m(x) P_n(x) dx = 0 \text{ pour } m \neq n ,$$

$$\int_{-\infty}^0 e^x P_n^2(x) dx = [n!]^2 ,$$

ainsi que les relations

$$P_{n+1} = (x + 2n + 1) P_n - n^2 P_{n-1} ,$$

$$x P'_n = n P_n - n^2 P_{n-1} ,$$

$$x P''_n + (x + 1) P'_n - n P_n = 0 .$$

On voit de plus que

$$P_n = e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^x] .$$

II. — Posons pour abréger  $\frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = T$  .

On a

$$\frac{d}{dh} [h^p (1-h)^2 T] = p h^{p-1} T - (x + 2p + 1) h^p T + (p + 1) h^{p+1} T .$$

En multipliant les 2 membres par  $dh$  et intégrant de 0 à  $h$ , il vient :

$$(p + 1) \int_0^h h^{p+1} T dh = h^p (1-h)^2 T + (x + 2p + 1) \int_0^h h^p T dh - p \int_0^h h^{p-1} T dh .$$

Si l'on pose

$$\frac{I_n}{n!} = \int_0^h h^n T dh ,$$

il vient entre 3 intégrales définies consécutives la formule de récurrence

$$I_{p+1} = p! h^p (1-h)^2 T + (x + 2p + 1) I_p - p^2 I_{p-1} . \quad (3)$$

On voit de suite que

$$I_1 = (1-h)^2 T + (x + 1) I_0 - 1 ,$$

et, en tenant compte de cette dernière relation, (3) donne successivement :

$$\text{pour } p = 1 : I_2 = (h + x + 3)(1 - h)^2 T + (x^2 + 4x + 2)I_0 - (x + 3) ,$$

$$\text{pour } p = 2 : I_3 = [2h^2 + (x + 5)h + x^2 + 8x + 11](1 - h)^2 T + (x^3 + 9x^2 + 18x + 6)I_0 - (x^2 + 8x + 11) .$$

D'une façon générale

$$I_n = [\theta_n(h, x)](1 - h)^2 T + P_n I_0 - V_n(x) , \quad (4)$$

où  $\theta_n(h, x)$  est un polynôme de degré  $(n - 1)$  en  $h$  et en  $x$ ,  $P_n(x)$  est un polynôme de degré  $n$  en  $x$  et  $V_n(x)$  un polynôme de degré  $(n - 1)$  en  $x$ .

On a en outre  $V_n(x) = \theta_n(0, x)$ .

D'après les calculs précédents :

$$\theta_1(h, x) = 1 ; \quad \theta_2(h, x) = h + x + 3 ;$$

$$\theta_3(h, x) = 2h^2 + (x + 5)h + x^2 + 8x + 11 .$$

$$V_1(x) = 1 ; \quad V_2(x) = x + 3 ; \quad V_3(x) = x^2 + 8x + 11 .$$

$$P_1(x) = x + 1 ; \quad P_2(x) = x^2 + 4x + 2 ; \quad P_3(x) = x^3 + 9x^2 + 18x + 6 .$$

De plus

$$P_0 = 1 .$$

En dérivant chaque membre de l'identité

$$p! \int_0^h h^p e^{-\frac{hx}{1-h}} dh = I_p - \frac{1}{p+1} I_{p+1}$$

par rapport à  $x$ , on trouve

$$I_{p+1} = \frac{dI_{p+1}}{dx} - (p + 1) \frac{dI_p}{dx} . \quad (5)$$

Cette relation donne pour  $p = 0$

$$I_1 = \frac{dI_1}{dx} - \frac{dI_0}{dx}$$

et, en tenant compte de  $I_1 = (1 - h)^2 T + (x + 1)I_0 - 1$ , on obtient

$$\frac{dI_0}{dx} = \frac{1}{x}(1 - h)T + I_0 - \frac{1}{x} , \quad (6)$$

expression qui sera utilisée dans la suite.

III. — Il existe des relations de récurrence pour les polynômes  $\theta$ ,  $V$ ,  $P$ . Partons de la relation (3) en y remplaçant  $I_n$  par son expression (4), il vient :

$$[\theta_{n+1} \cdot (1-h)^2 T + P_{n+1} I_0 - V_{n+1}] - (x+2n+1) [\theta_n \cdot (1-h)^2 T + P_n I_0 - V_n] \\ + n^2 [\theta_{n-1} (1-h)^2 T + P_{n-1} I_0 - V_{n-1}] = n! h^n (1-h)^2 T ,$$

d'où les relations cherchées

$$\theta_{n+1} - (x+2n+1) \theta_n + n^2 \theta_{n-1} = n! h^n , \quad (7)$$

$$V_{n+1} - (x+2n+1) V_n + n^2 V_{n-1} = 0 , \quad (8)$$

$$P_{n+1} - (x+2n+1) P_n + n^2 P_{n-1} = 0 . \quad (9)$$

La formule (9) montre que les  $P_n$  sont bien les polynômes de Laguerre, car  $P_1 = x+1$  et  $P_2 = x^2 + 4x + 2$ .

La formule (8) se déduit de (7) en y faisant  $h=0$ ; elle est identique à (9), mais les polynômes  $V_n$  sont différents des polynômes  $P_n$ , car  $V_1 = 1$  et  $V_2 = x+3$ .

IV. — Dérivons les deux membres de (4) par rapport à  $x$ ; il vient, en remplaçant  $\frac{dI_0}{dx}$  par sa valeur (6) et en tenant compte de (5) :

$$(1-h) \left[ \theta_{n+1} - \frac{d\theta_{n+1}}{dx} + (n+1) \frac{d\theta_n}{dx} \right] + h [\theta_{n+1} - (n+1) \theta_n] \\ = \frac{P_{n+1} - (n+1) P_n}{x} , \quad (10)$$

$$V_{n+1} = \frac{dV_{n+1}}{dx} - (n+1) \frac{dV_n}{dx} + \frac{P_{n+1} - (n+1) P_n}{x} , \quad (11)$$

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} = (n+1) \left( \frac{dP_n}{dx} + P_n \right) . \quad (12)$$

La relation (11) s'obtiendrait de (10) en y faisant  $h=0$ . De (12) on déduit le développement suivant de  $P'_n$  :

$$P'_n = n P_{n-1} + n(n-1) P_{n-2} + \dots + n! P_0 . \quad (13)$$

De (9) et (12) on tire sans peine la relation indiquée par LAGUERRE

$$xP'_n = nP_n - n^2P_{n-1} \quad (14)$$

et l'équation différentielle

$$xP''_n + (x+1)P'_n - nP_n = 0. \quad (15)$$

V. — Posons  $\theta_n = e^{\frac{x}{1-h}} H_n$ .

En utilisant la relation (14) et en substituant cette valeur de  $\theta_n$  dans la relation (10), on obtient :

$$(n+1)\left(H_n + \frac{dH_n}{dx}\right) - \frac{dH_{n+1}}{dx} = \frac{e^{-\frac{x}{1-h}}}{1-h} \frac{P'_{n+1}}{n+1}. \quad (16)$$

La relation de récurrence entre les  $H_n$  est

$$H_{n+1} - (x+2n+1)H_n + n^2H_{n-1} = n!h^n e^{-\frac{x}{1-h}}. \quad (17)$$

De (16) et (17) on déduit finalement l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} x \frac{d^2H_n}{dx^2} + (x+1) \frac{dH_n}{dx} - nH_n \\ = \frac{e^{-x}}{1-h} T[hP_n - 2(1-h)P'_n - n!h^{n+1}], \end{aligned} \quad (18)$$

qui ne diffère de celle des polynômes de LAGUERRE que par la présence du second membre.

Pour  $h=0$ ,  $H_n(0, x) = e^{-x}V_n$  et (18) donne l'équation différentielle à laquelle satisfont les polynômes  $V_n$

$$x \frac{d^2V_n}{dx^2} + (1-x) \frac{dV_n}{dx} - (n+1)V_n = -2P'_n. \quad (19)$$

VI. — La fonction  $\frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h}$ , considérée par ABEL<sup>1</sup> (*Œuvres*, t. II, p. 284), donne naissance à des polynômes  $Q_n$  si on la développe suivant les puissances croissantes de  $h$

$$\frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = Q_0 + Q_1 \frac{h}{1!} + Q_2 \frac{h^2}{2!} + \dots + Q_n \frac{h^n}{n!} + \dots \quad (20)$$

<sup>1</sup> Voir aussi NIJLAND, *Over een bijzondere soort van geheele functiën*. Utrecht, 1896. (Thèse).

où  $Q_n$  a comme expression générale :

$$Q_n(x) = n! \left[ 1 - nx + \frac{n(n-1)}{1^2 \cdot 2^2} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} x^3 + \dots \right]. \quad (21)$$

ABEL indique en outre les propriétés suivantes de ces polynômes

$$\int_0^\infty e^{-x} Q_n(x) Q_m(x) dx = 0, \quad \text{pour } m \neq n$$

$$\int_0^\infty e^{-x} Q_n^2(x) dx = [n!]^2.$$

En partant de la fonction génératrice, il est facile d'obtenir la relation de récurrence des polynômes  $Q_n$

$$Q_{n+1} - (2n+1-x)Q_n + n^2 Q_{n-1} = 0,$$

ainsi que l'équation différentielle

$$xQ_n'' + (1-x)Q_n' + nQ_n = 0.$$

$Q_n$  s'exprime encore sous forme de dérivée  $n^{\text{me}}$

$$Q_n = e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^{-x}].$$

VII. — Le développement des  $Q_n$  en fonction des  $P_n$  peut s'obtenir au moyen de l'équation différentielle :

$$Q_n = (-1)^n \left[ P_n - \frac{n^2}{1} 2P_{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1 \cdot 2} 2^2 P_{n-2} - \dots \right. \\ \left. (-1)^r \frac{n^2(n-1)^2 \dots (n-r+1)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} 2^r P_{n-r} - \dots (-1)^n n! 2^n P_0 \right].$$

Comme les polynômes  $Q_n$  se déduisent des  $P_n$  en y remplaçant  $x$  par  $-x$  et réciproquement, il est possible d'écrire

$$P_n = (-1)^n \left[ Q_n - \frac{n^2}{1!} 2Q_{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1 \cdot 2} 2^2 Q_{n-2} - \dots \right. \\ \left. (-1)^r \frac{n^2(n-1)^2 \dots (n-r+1)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} 2^r Q_{n-r} - \dots (-1)^n n! 2^n Q_0 \right].$$

Ces développements sont, à l'alternance des signes près et aux puissances de 2 près dans les coefficients, analogues à l'expression générale (21) de  $Q_n$  ou à celle (2) de  $P_n$ .

Remplaçons maintenant dans le développement (20)  $h$  par  $\frac{1}{h}$  et multiplions chaque membre par  $e^{-x}$  on obtient

$$- \frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = \quad (22)$$

$$e^{-x} \left[ \frac{Q_0}{h} + \frac{Q_1}{1!} \frac{1}{h^2} + \frac{Q_2}{2!} \frac{1}{h^3} + \dots + \frac{Q_{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{h^n} + \frac{Q_n}{n!} \frac{1}{h^{n+1}} + \dots \right].$$

Ce second membre représente le développement suivant les puissances décroissantes de  $h$  de la fonction génératrice des polynômes de LAGUERRE.

De la même manière, on tire de (1) le développement suivant les puissances décroissantes de  $h$  de la fonction  $\frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h}$ .

$$- \frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} =$$

$$e^x \left[ \frac{P_0}{h} + \frac{P_1}{1!} \frac{1}{h^2} + \frac{P_2}{2!} \frac{1}{h^2} + \dots + \frac{P_{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{h^n} + \frac{P_n}{n!} \frac{1}{h^{n+1}} + \dots \right].$$

Multiplions chaque membre de cette dernière relation par  $n! h^n dh$  et intégrons de 0 à  $h$ , il vient :

$$-I_n = - \int_0^h \frac{n! h^n}{1-h} e^{-\frac{hx}{1-h}} dh = n! e^x \left[ \frac{P_0}{n} \frac{h^n}{1!} + \frac{P_1}{n-1} \frac{h^{n-1}}{2!} + \frac{P_2}{n-2} \frac{h^{n-2}}{3!} + \frac{P_3}{n-3} \frac{h^{n-3}}{4!} + \dots + \frac{P_{n-1}}{1} \frac{h}{(n-1)!} + \dots \right]. \quad (23)$$

VIII. — En utilisant une méthode indiquée par Hermite à propos de l'intégrale  $\int_0^h \frac{h^n dh}{\sqrt{1-2hx+h^2}}$  (*Œuvres*, t. IV, p. 169), on voit que les polynômes  $\theta_n$  et  $V_n$  peuvent s'exprimer au moyen des  $P_n$  et des  $Q_n$ .



Si l'on écrit (4) de la manière suivante :

$$\frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} I_n = \theta_n(h, x) + \frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} P_n I_0 - \frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} V_n$$

on remarque que  $\theta_n(h, x)$  forme la partie entière du produit

$$\frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} \int_0^h \frac{n! h^n}{1-h} e^{-\frac{hx}{1-h}} dh.$$

développé suivant les puissances décroissantes de  $h$ .

Si l'on remplace les deux facteurs par leur développement respectif (22) et (23) et si l'on multiplie membre à membre, on obtient le développement de  $\theta_n(h, x)$  suivant les puissances décroissantes de  $h$

$$\begin{aligned} \theta_n(h, x) = n! & \left[ \frac{P_0 Q_0}{n} h^{n-1} + \left( \frac{P_0 Q_1}{n} + \frac{P_1 Q_0}{n-1} \right) h^{n-2} \right. \\ & + \left( \frac{P_0 Q_2}{n \cdot 2!} + \frac{P_1 Q_1}{(n-1) \cdot 1! \cdot 1!} + \frac{P_2 Q_0}{(n-2) \cdot 2! \cdot 1!} \right) h^{n-3} \\ & + \left( \frac{P_0 Q_3}{n \cdot 3!} + \frac{P_1 Q_2}{(n-1) \cdot 1! \cdot 2!} + \frac{P_2 Q_1}{(n-2) \cdot 2! \cdot 1!} + \frac{P_3 Q_0}{(n-3) \cdot 3!} \right) h^{n-4} + \dots \\ & + \left( \frac{P_0 Q_i}{n \cdot i!} + \frac{P_1 Q_{i-1}}{(n-1) \cdot 1! \cdot (i-1)!} \right. \\ & \left. + \frac{P_2 Q_{i-2}}{(n-2) \cdot 2! \cdot (i-2)!} + \dots + \frac{P_i Q_0}{(n-i) \cdot i!} \right) h^{n-i-1} + \dots \left. \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Le développement de  $V_n$  est formé de tous les termes ne contenant pas  $h$

$$\begin{aligned} V_n = P_0 Q_{n-1} + \frac{n}{1!} P_1 Q_{n-2} + \frac{n(n-1)}{2!} P_2 Q_{n-3} \\ + \dots + \frac{n(n-1)}{1!} P_{n-2} Q_1 + \frac{n}{1} P_{n-1} Q_0. \end{aligned} \quad (25)$$

Un autre développement de  $V_n$ , ayant la forme :

$$V_n = a_1 P_{n-1} + \dots + a_r P_{n-r} + \dots + a_n P_0,$$

s'obtient au moyen de l'équation différentielle (19) et du développement (13)

$$\begin{aligned} V_n = P_{n-1} + 2(n-1) P_{n-2} + (n-2)(3n-4) P_{n-3} \\ + 2^2(n-2)^2(n-3) P_{n-4} + (n-3)(n-4)(5n^2 - 25n + 32) P_{n-5} + \dots \end{aligned}$$

chaque coefficient s'obtenant au moyen du précédent par la formule de récurrence

$$a_r = \frac{2}{2n - r + 1} \left[ (n - r + 1)^2 a_{r-1} + \frac{n!}{(n - r)!} \right].$$

IX. — En prenant  $h = 1$ , comme limite supérieure dans l'intégrale  $I_n$  et son expression (4), il vient :

$$\int_0^1 \frac{n! h^n}{1 - h} e^{-\frac{hx}{1-h}} dh = -V_n + P_n \int_0^1 \frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1 - h} dh,$$

ou encore

$$\int_0^1 \frac{n! h^n}{1 - h} e^{-\frac{x}{1-h}} dh = -e^{-x} V_n + P_n \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{1-h}}}{1 - h} dh.$$

Posons  $z = \frac{x}{1-h}$ ; on a, après substitution,

$$\int_x^\infty n! (z - x)^n \frac{e^{-z}}{z^{n+1}} dz = -e^{-x} V_n + P_n \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz. \quad (26)$$

Le premier membre peut se mettre sous forme d'intégrale multiple d'ordre  $n$  de la fonction  $\frac{e^{-x}}{x^{n+1}}$ ; ces intégrales multiples donnent donc naissance aux polynômes  $P_n$ .

La formule (26) est celle obtenue par LAGUERRE (*Œuvres*, t. I, p. 432), qui en déduit que  $P_n$  est le dénominateur de la réduite d'ordre  $n$  du développement en fraction continue de la fonction  $e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$ , le polynôme  $V_n$  étant le numérateur de cette réduite.

Enfin on remarque que l'intégrale  $I_n$  se transforme par le changement de  $x$  en  $-x$ , en une nouvelle intégrale  $J_n$  qui donne naissance aux polynômes  $Q_n$  d'ABEL

$$J_n = \int_0^h \frac{n! h^n}{1 - h} e^{\frac{hx}{1-h}} dh = [\Omega_n(h, x)] (1 - h)^2 \frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1 - h} + Q_n J_0 - W_n(x),$$

où

$$\Omega_n(h, x) = \theta_n(h, -x),$$

$$Q_n(x) = P_n(-x),$$

$$W_n(x) = V_n(-x).$$