

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	20 (1918)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE
<b>Autor:</b>	de la Vallée Poussin, C.
<b>Kapitel:</b>	7. — Relations entre l'ordre de grandeur de la meilleure approximation et les propriétés analytiques.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-18019">https://doi.org/10.5169/seals-18019</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

cision qui en fait le principal intérêt. Il prouve que l'approximation décroît plus vite que toute puissance négative de  $n$ , mais il n'en fixe plus l'ordre. Il y a donc lieu de faire alors de nouvelles hypothèses sur la nature de la fonction. La première qui se présente à l'esprit est celle d'*analycité*.

### 7. — Relations entre l'ordre de grandeur de la meilleure approximation et les propriétés analytiques.

Lorsque la fonction  $f(x)$  est analytique et holomorphe sur l'axe réel et qu'il s'agit de sa représentation approchée sur cet axe seulement, l'ordre de la meilleure approximation est liée aux propriétés analytiques de la fonction et dépend avant tout de la situation de ses points critiques s'il en existe. C'est encore M. Bernstein qui a étudié le premier cette dépendance dans son Mémoire couronné par l'Académie de Belgique (1912). Mais il est revenu sur la question et il a publié des résultats isolés, mais d'une singulière précision et du plus grand intérêt, dans un second Mémoire présenté, peu après, à la même Académie (1913) (16).

M. Bernstein s'est occupé de l'approximation par polynômes. Mais ses résultats prennent une forme plus simple si on les traduit dans le mode de représentation trigonométrique, par la substitution habituelle  $x = \cos u$ . Les parallèles à l'axe réel du plan  $u$  jouent un rôle prépondérant dans l'approximation trigonométrique ; il y a lieu d'observer que la substitution  $x = \cos u$  leur fait correspondre des ellipses homofocales, de foyers  $\pm 1$ , dans le plan  $x$ . Ce sont ces ellipses qui jouent le rôle prépondérant dans l'approximation par polynômes et, par suite, dans les énoncés de M. Bernstein. Mais nous n'en parlerons pas ; il nous suffira d'énoncer les résultats essentiels de la théorie dans la seule hypothèse de la représentation trigonométrique.

Soit donc à étudier la meilleure approximation trigonométrique de la fonction  $\varphi(u)$  de période  $2\pi$  sur l'axe réel. Cette fonction est analytique et holomorphe sur cet axe. Supposons d'abord qu'elle admette un ou plusieurs points critiques

imaginaires. Alors, en première analyse, la meilleure approximation dépend de la distance de l'axe réel au point critique le plus rapproché.

On peut, en effet, formuler le théorème suivant, dont la première partie est due à M. Bernstein, mais que je complète par l'énoncé d'une seconde partie dont la démonstration n'a pas encore été publiée.

*Si une fonction  $\varphi(u)$  de période  $2\pi$  est holomorphe sur l'axe réel et possède son point critique le plus rapproché de cet axe sur l'une des deux droites  $y = \pm b$  ( $b > 0$ ), on suppose  $u = x + yi$ , alors, quelque petit que soit  $\varepsilon$  positif, la meilleure approximation trigonométrique,  $\rho_n$ , de  $\varphi(u)$  sur l'axe réel vérifiera constamment l'inégalité*

$$\rho_n < e^{-n(b-\varepsilon)},$$

*à partir d'une valeur suffisamment grande de  $n$ , tandis qu'elle ne vérifiera jamais définitivement l'inégalité*

$$\rho_n < e^{-n(b+\varepsilon)}$$

*quelque grand que soit  $n$ .*

La connaissance de l'ordre de la meilleure approximation se précise davantage si l'on suppose que  $\varphi(u)$  n'ait d'autres points critiques que des pôles sur les deux droites  $y = \pm b$  du théorème précédent. Je suis, en effet, en mesure de démontrer le théorème suivant, mais qui, je le pense, pourrait être beaucoup précisé :

*Si la fonction  $\varphi(u)$  de  $u = x + yi$  a ses points critiques les plus rapprochés de l'axe réel sur les droites  $y = \pm b$  ( $b > 0$ ) et que le point critique de l'ordre le plus élevé parmi ceux-ci soit un pôle d'ordre  $k$ , alors on aura constamment, à partir d'une valeur suffisamment grande de  $n$*

$$\rho_n < n^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon} e^{-nb}$$

*tandis que l'on n'a jamais définitivement*

$$\rho_n < n^{k-1-\varepsilon} e^{-nb}.$$

Mais en particularisant beaucoup plus la nature du point critique, on peut aller beaucoup plus loin et déterminer la valeur asymptotique même de  $\rho_n$ . C'est ce qui a été fait par M. Bernstein dans son dernier Mémoire de 1913 et le point de départ de cet habile mathématicien se trouve encore une fois dans les travaux de Tchebycheff.

En effet, en utilisant une formule de l'illustre mathématicien russe, M. Bernstein a réussi à former le polynôme d'approximation d'ordre  $n$  de

$$\frac{1}{x - a}$$

dans l'intervalle  $(-1, +1)$ ,  $a$  étant réel et  $> 1$ .

Par conséquent, il a obtenu en même temps la valeur exacte de l'approximation minimum. C'est là un résultat extrêmement important malgré son caractère particulier. Mais nous allons traduire ce résultat dans le mode de représentation trigonométrique, pour le rapprocher des précédents. On va voir qu'il prend alors une forme singulièrement instructive, bien plus simple et plus élégante que sous la forme considérée par M. Bernstein.

Par la transformation de Bernstein et en posant  $a = \operatorname{Ch} b$  où  $b$  est réel et positif, la fraction  $1 : (x - a)$  se transforme, à un facteur constant près, dans l'expression trigonométrique

$$\frac{\operatorname{Sh} b}{\cos u - \operatorname{Ch} b}$$

qui, aux multiples près de la période, n'a qu'un seul pôle  $u = bi$  sur chacune des droites  $y = \pm b$ , pôle dont le résidu a pour module l'unité. La meilleure approximation trigonométrique de cette fonction sur l'axe réel se réduit alors à la valeur, exacte et toute simple,

$$\rho_n = e^{-nb}.$$

Plus généralement, soit  $\varphi(u)$  une fonction paire et de période  $2\pi$ . Supposons que ses points critiques les plus voisins de l'axe réel soient sur les droites  $y = \pm b$ . Admettons encore qu'aux multiples près de la période, ces points cri-

tiques se réduisent sur chacune de ces droites, au seul pôle simple  $u = \pm bi$ , avec un résidu de module  $\alpha$ . Alors, par comparaison avec le résultat précédent, on obtient immédiatement la *valeur asymptotique* de la meilleure approximation trigonométrique de  $\varphi(u)$ . Ce sera nécessairement

$$\rho_n \sim \alpha e^{-bn}.$$

Si au lieu de cela, le pôle était d'ordre  $k$ , les autres conditions restant les mêmes, on aurait la formule asymptotique

$$\rho_n \sim \mu n^{k-1} e^{-nb},$$

où  $\mu$  est une constante qui ne dépend que de la fonction.

Voilà assurément des indications bien précieuses sur la manière dont il faut essayer de préciser les résultats plus vagues obtenus tout à l'heure dans des hypothèses plus générales.

Pour terminer, je dirai encore un mot du cas où la fonction à représenter est holomorphe dans tout le plan. Ce cas ne paraît pas avoir été étudié jusqu'ici. Mais, dans cette nouvelle hypothèse, la question de la meilleure approximation présente une analogie plus étroite avec celle de la convergence de la formule de Taylor. C'est le mode de croissance de la fonction qui devient le facteur principal dont dépend la meilleure approximation. Je vais me borner encore à la représentation trigonométrique. Les conclusions principales auxquelles je suis parvenu peuvent alors se formuler dans le théorème suivant :

*Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe de  $z = x + yi$  et de période  $2\pi$ . Soit ensuite  $\varphi(y)$  la plus petite fonction non décroissante de  $y$  positif qui satisfait, quel que soit  $y$ , à la condition*

$$|f(x \pm yi)| \leq e^{y\varphi(y)};$$

*soit  $\psi(n)$  la fonction inverse de  $\varphi$ , c'est-à-dire la plus petite solution de  $\varphi(y) = n$ . Alors, quelque petit que soit  $\varepsilon$  positif, la meilleure approximation trigonométrique de  $f(x)$  sur l'axe réel satisfait à la condition*

$$\rho_n < e^{-(1-\varepsilon)n\psi(n^{1-\varepsilon})}$$

à partir d'une valeur suffisamment grande de  $n$ , tandis qu'elle ne satisfait jamais définitivement à la condition

$$\rho_n < e^{-(1+\varepsilon)n\psi(n)}.$$

Dans cette trop longue analyse, je n'ai fait qu'effleurer les sujets que j'ai traités, j'en ai passé beaucoup d'autres sous silence. Je n'ai rien voulu de plus que ramener l'attention sur une question que les événements actuels ont fait oublier, mais qui paraissait pleine de promesses. Elle ouvre encore de nombreuses voies qui ne paraissent pas trop difficiles à explorer. Je souhaite que de jeunes mathématiciens s'y engagent et y fassent une ample moisson de découvertes.

#### INDEX BIBLIOGRAPHIQUE (*articles cités*).

1. WEIERSTRASS. *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen.* Sitzungsberichte der Kgl. Preuss. Akad. der Wiss. 1885. p. 633-639, 789-805. *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente.* Werke, Bd. III (1903), p. 1-37.

RUNGE a démontré le premier théorème presque en même temps que Weierstrass. *Ueber die Darstellung willkürlicher Functionen.* Acta Mathematica, t. VII, 1885, p. 387-392; *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.* Acta Mathematica, t. VI, 1885, p. 229-244.

2. VOLTERRA. *Sul principio di Dirichlet.* Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XI.

3. DE LA VALLÉE POUSSIN. *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier.* Bull. de l'Acad. royale de Belgique (classe des sciences), n° 3 (mars) 1908.

4. LANDAU. *Ueber die Approximation einer stetigen Function durch eine ganze rationale Function.* Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XXV, 1908.

5. H. LEBESGUE. *Sur l'approximation des fonctions.* Bulletin des sciences math. 2<sup>me</sup> série, t. XXII; novembre 1898.

6. S. BERNSTEIN. *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné.* Mémoires publiés par la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique. Collection in-4°, 2<sup>me</sup> série, t. IV, 1912. Ce Mémoire présenté