

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE
Autor: de la Vallée Poussin, C.
Kapitel: 6. — Relations entre l'ordre de grandeur de la meilleure approximation et les propriétés différentielles.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18019>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Si la somme d'ordre n de la série de Fourier de la fonction périodique $f(x)$ donne une approximation $\varphi(n)$, l'approximation trigonométrique minimum ρ_n satisfait à la condition

$$\rho_n > k \frac{\varphi(n)}{\log n},$$

où k est une constante numérique assignable a priori.

La démonstration repose sur les propriétés de l'intégrale de Dirichlet, mais, si simple qu'elle soit, elle ne peut trouver place ici.

Si l'on applique, par exemple, les deux règles précédentes à la fonction $|x|$, la règle de M. Bernstein prouve que ρ_n n'est pas d'ordre supérieur à $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ et celle de M. Lebesgue que ρ_n n'est pas d'ordre supérieur à $\frac{1}{n \log n}$. Dans ce cas, c'est la règle de Lebesgue qui l'emporte, mais il n'en est pas toujours ainsi.

6. — Relations entre l'ordre de grandeur de la meilleure approximation et les propriétés différentielles.

La meilleure approximation ρ_n d'une fonction continue $f(x)$ par un polynôme de degré n tend vers zéro quand n tend vers l'infini. C'est le théorème même de Weierstrass. J'ai posé en 1908 (12) la question de déterminer l'ordre de grandeur de ρ_n pour n infini et M. Bernstein a posé en 1912 (6) celle d'en déterminer la valeur asymptotique quand elle existe.

Aujourd'hui des résultats définitifs sont acquis et répondent à ces deux questions. Ils sont dus à M. Dunham Jackson (1911) et surtout à M. Bernstein (1912).

Un premier résultat essentiel est qu'il existe une dépendance étroite entre l'ordre de la meilleure approximation et l'existence des dérivées jusqu'à un ordre plus ou moins élevé.

L'existence d'une dérivée bornée d'un certain ordre assure une approximation d'un ordre correspondant et c'est M. Dunham Jackson (8) qui a trouvé les théorèmes les plus précis

sous ce rapport. Nous les avons exposés dans un article antérieur. Mais M. Jackson n'énonce aucun théorème réciproque et l'on ne sait pas si ces énoncés s'appliquent à l'approximation minimum. Seul M. Bernstein (6) est arrivé à des résultats positifs en ce sens et a su remonter de l'ordre de l'approximation obtenue aux propriétés différentielles de la fonction.

M. Bernstein n'y a d'ailleurs réussi qu'en s'inspirant des travaux de Tchebycheff et nous allons exposer de quelle manière. Nous donnerons d'ailleurs une idée suffisante de la question en nous bornant à l'approximation trigonométrique et en simplifiant un peu les données du problème.

Faire l'approximation trigonométrique de $f(x)$ revient à effectuer un développement en série

$$f(x) = P_1 + P_2 + \dots P_n + \dots$$

dont les termes sont des expressions trigonométriques d'ordres croissants et nous supposons, pour simplifier, P_n d'ordre n . Admettons que les termes de cette série soient, en valeur absolue, inférieurs à ceux de la série positive convergente

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n + \dots$$

La rapidité de l'approximation correspond à la convergence plus ou moins rapide de la série. D'autre part, l'existence des dérivées de $f(x)$ découle de la possibilité de dériver la série. Or cette dérivation est légitime tant que les séries dérivées sont absolument et uniformément convergentes. Tout revient donc à avoir une règle pour conclure de l'ordre de grandeur de P_n à l'ordre de grandeur de ses dérivées. C'est cette règle que M. Bernstein a trouvée, en complétant certaines recherches de Tchebycheff, et cette règle est d'une simplicité et d'une précision inattendues. La voici :

Si une expression trigonométrique d'ordre n est de module $< L$ et que l'expression soit formée de sinus seuls ou de cosinus seuls, ses dérivées successives d'ordres 1, 2, 3, ... sont respectivement de modules $< nL$, $< n^2L$, $< n^3L$, ... Il suffit de doubler ces bornes si l'expression trigonométrique est de la forme générale.

On voit d'après cela que, si la décroissance des quantités ε_n est suffisamment rapide pour assurer la convergence de la série

$$1^p \varepsilon_1 + 2^p \varepsilon_2 + \dots n^p \varepsilon_n + \dots,$$

elle assure aussi l'existence de la dérivée d'ordre p de $f(x)$. Tel est réduit à ce qu'il a de plus essentiel le raisonnement de M. Bernstein.

Pour mettre en lumière la netteté des conclusions auxquelles conduisent les méthodes de M. Bernstein, donnons d'abord, avec cet habile géomètre, la définition suivante :

Nous dirons qu'une fonction continue $\varphi(x)$ vérifie une *condition de Lipschitz d'ordre α* ($0 < \alpha \leq 1$), s'il existe une constante M telle qu'on ait, quel que soit δ positif,

$$|\varphi(x + \delta) - \varphi(x)| < M\delta^\alpha.$$

Considérons maintenant une fonction $f(x)$ de période 2π et son approximation trigonométrique d'ordre n . Nous avons le théorème suivant :

Si $f(x)$ admet une dérivée continue d'ordre p , laquelle satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α ($0 < \alpha < 1$), alors on peut assigner une constante M_1 telle que l'approximation trigonométrique minimum, ρ_n , satisfasse, quel que soit n , à la condition

$$\rho_n < \frac{M_1}{n^{p+\alpha}}.$$

Réciproquement, si ρ_n satisfait à une condition de cette forme où $0 < \alpha < 1$ (limites exclues), la fonction $f(x)$ admet une dérivée d'ordre p qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α .

A vrai dire, ce théorème est énoncé ici pour la première fois sous cette forme stricte, et nous en publierons ailleurs la démonstration, mais il est dû, dans sa grande partie, à M. Bernstein. Ainsi que M. Bernstein l'a déjà remarqué, l'exclusion du cas limite $\alpha = 1$ est essentielle et ne tient pas à une imperfection de l'énoncé.

Si toutes les dérivées existent, le théorème perd de la pré-

cision qui en fait le principal intérêt. Il prouve que l'approximation décroît plus vite que toute puissance négative de n , mais il n'en fixe plus l'ordre. Il y a donc lieu de faire alors de nouvelles hypothèses sur la nature de la fonction. La première qui se présente à l'esprit est celle d'*analyticité*.

7. — Relations entre l'ordre de grandeur de la meilleure approximation et les propriétés analytiques.

Lorsque la fonction $f(x)$ est analytique et holomorphe sur l'axe réel et qu'il s'agit de sa représentation approchée sur cet axe seulement, l'ordre de la meilleure approximation est liée aux propriétés analytiques de la fonction et dépend avant tout de la situation de ses points critiques s'il en existe. C'est encore M. Bernstein qui a étudié le premier cette dépendance dans son Mémoire couronné par l'Académie de Belgique (1912). Mais il est revenu sur la question et il a publié des résultats isolés, mais d'une singulière précision et du plus grand intérêt, dans un second Mémoire présenté, peu après, à la même Académie (1913) (16).

M. Bernstein s'est occupé de l'approximation par polynômes. Mais ses résultats prennent une forme plus simple si on les traduit dans le mode de représentation trigonométrique, par la substitution habituelle $x = \cos u$. Les parallèles à l'axe réel du plan u jouent un rôle prépondérant dans l'approximation trigonométrique; il y a lieu d'observer que la substitution $x = \cos u$ leur fait correspondre des ellipses homofocales, de foyers ± 1 , dans le plan x . Ce sont ces ellipses qui jouent le rôle prépondérant dans l'approximation par polynômes et, par suite, dans les énoncés de M. Bernstein. Mais nous n'en parlerons pas; il nous suffira d'énoncer les résultats essentiels de la théorie dans la seule hypothèse de la représentation trigonométrique.

Soit donc à étudier la meilleure approximation trigonométrique de la fonction $\varphi(u)$ de période 2π sur l'axe réel. Cette fonction est analytique et holomorphe sur cet axe. Supposons d'abord qu'elle admette un ou plusieurs points critiques