Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ORIGINES D'UN PROBLÈME INÉDIT DE E. TORRICELLI
Autor: Turrière, Emile
Kapitel: Application des considérations précédentes au problème de Torricelli.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18035

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 26.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

λ doit satisfaire à l'équation du paragraphe précédent :

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = \square \ .$$

L'impossibilité de l'équation considérée, ou encore celle du système des équations simultanées :

$$X^2 + 2X + 2 = \square \ , \qquad X^2 - 2X - 2 = \square \ ,$$

est équivalente à celle de l'équation $\sin u + \sin v = 1$.

Application des considérations précédentes au problème de Torricelli.

18. — Au paragraphe 8, la solution du problème de Fermat a été rattachée par une voie toute naturelle à l'étude des solutions rationnelles de l'équation de Brahmagupta-Fermat :

$$(1 + t^2)(1 + 2t - t^2) = \square \ .$$

Cette équation est du type qui vient d'être considéré à l'instant : le polynôme du quatrième degré du premier membre est décomposé en un produit de facteurs quadratiques à coefficients rationnels.

La traduction analytique de l'énoncé du problème de Fermat pouvait fort bien se présenter à Torricelli sous une forme équivalente, à la seule condition d'utiliser les formules de Diophante et non les formules de Brahmagupta, dans la représentation de l'arithmotriangle pythagorique.

Ces formules de Diophante,

$$b = \frac{P^2 - Q^2}{P^2 + Q^2} a \ , \qquad c = \frac{2PQ}{P^2 + Q^2} a \ ,$$

ramènent la recherche des arithmotriangles pythagoriques, jouissant des deux propriétés énoncées $a = \square$ et $b + c = \square$, à l'étude des solutions entières de l'équation indéterminée :

$$(P^2 + Q^2)(P^2 + 2PQ - Q^2) = \square \ .$$

Tout facteur premier de l'un des deux polynômes quadratiques doit être un facteur premier de l'autre, et dans les

deux cas sous des puissances impaires; or tout diviseur commun des deux polynômes quadratiques appartient aussi à leur somme et à leur différence :

$$2P(P+Q)\ , \qquad 2Q(P-Q)\ ;$$

P et Q étant premiers entre eux, par définition, ce facteur commun ne peut être que le nombre deux.

Comme d'autre part, en raison de la présence de P^2+Q^2, aucun doute n'est possible sur les signes, l'équation se décompose soit en le système :

$$P^2+Q^2=\square\ , \qquad P^2+2PQ-Q^2=\square\ ,$$

soit en le système :

$$P^2+Q^2=2\square\ , \qquad P^2+2PQ-Q^2=2\square\ ;$$

le second système se ramène d'ailleurs au premier par la substitution $P+Q=2P_1$, $P-Q=2Q_1$; en d'autres termes, à toute solution t_1 correspond une nouvelle solution $t=\frac{1-t_1}{1+t_1}$, ce qui résulte de la symétrie qui existe dans les rôles des deux cathètes.

L'équation

$$(P^2+Q^2)(P^2+2PQ-Q^2)=\square\ ,$$

du problème de Fermat *se décompose ainsi en deux équations simultanées*

$$P^2+Q^2=\square\ , \qquad P^2+2PQ-Q^2=\square\ ,$$

dont le système lui est équivalent.

Nous avons alors :

$$a+c=\frac{(P+Q)^2}{P^2+Q^2}a=\square\ ,$$

nous retrouvons ainsi que la somme de l'hypoténuse et de *l'une* des deux cathètes est un nombre carré parfait.

La solution générale de l'équation $P^2+2PQ-Q^2=\square$ étant donnée par la formule

$$\frac{Q}{P}=2.\frac{1-x}{1+x^2}\ ,$$

nous sommes, par cette méthode et en utilisant l'équation $P^2 + Q^2 = \square$, ramenés à l'équation,

$$(x^2 + 1)^2 + 4(x - 1)^2 = \square \ ;$$

du paragraphe 14.

19. — Pour terminer, il convient de remarquer que les considérations générales du paragraphe 15 s'appliquent précisément aux équations

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square \qquad \text{et} \qquad \mu^3 - 2\mu = \square$$

des paragraphes 8 et 14. J'ai déjà signalé que la seconde n'est qu'une conséquence de la première par la transformation

$$\lambda = \mu - \frac{2}{\mu} \ ,$$

qui implique d'ailleurs que λ soit un carré parfait.

L'équation

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square \qquad \text{ou} \qquad \lambda(\lambda^2 + 8) = \square$$

est bien de l'espèce considérée au paragraphe 15. En posant $\lambda = \frac{P}{Q}$, elle devient

$$PQ(P^2 + 8Q^2) = \square \ ;$$

Q ne peut avoir de facteur premier à une puissance impaire : c'est nécessairement au signe près un carré parfait. Quant à P, il est de même de l'une des formes $\pm p^2$ ou $\pm 2p^2$. Le produit PQ devant être positif, la question de signe ne se pose pas et il suffit de prendre :

$$P = 2p^2 \quad \text{ou} \quad p^2 \qquad \text{et} \qquad Q = q^2 \ .$$

La première hypothèse, $P = 2p^2$, $Q = q^2$ donne :

$$2(p^4 + 2q^4) = \square \ ;$$

le nombre entier p doit donc être pair ; soit $p = 2p'$; l'équation devient

$$8p'^4 + q^4 = \square \ ;$$

et la solution correspondante est $\lambda' = 8\frac{p'^2}{q^2}$. Quant à la se-

conde hypothèse, elle donne la même équation :

$$p^4 + 8q^4 = \square ,$$

mais avec $\lambda = \frac{p^2}{q^2}$. Entre les deux solutions λ et λ', qui correspondent ainsi à une même solution de l'équation

$$\omega^4 + 8 = \square ,$$

existe la relation $\lambda\lambda' = 8$, laissant invariante l'équation

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square .$$

En résumé : les solutions de cette dernière équation sont des nombres rationnels carrés ou doubles de carrés, et elles se transforment en l'équation :

$$\omega^4 + 8 = \square .$$

Nous retombons ainsi sur l'analyse de LAGRANGE (pages 386 et 387 du mémoire cité); les plus simples solutions sont (d'après LAGRANGE) :

$$\omega = 1 , \quad \frac{7}{6} , \quad \frac{239}{13} , \ldots$$

20. — L'équation

$$\mu^3 - 2\mu = \square$$

se laisse traiter d'une manière analogue ; μ est au signe près un carré ou le double d'un carré et, suivant les cas, cette équation se transforme en l'une ou l'autre des équations :

$$2x^4 - y^4 = \square , \quad x^4 - 2y^4 = \square .$$

LAGRANGE (pages 378-379 de son remarquable Mémoire) a bien remarqué qu'alors que les équations $x^4 + y^4 = \square$, $x^4 \pm 4y^4 = \square$, $2(x^4 \pm y^4) = \square$, $x^4 + 2y^4 = \square$ sont impossibles, d'après DIOPHANTE, FERMAT ou EULER, il n'en est pas de même de l'une et de l'autre des deux équations

$$2x^4 - y^4 = \square , \quad x^4 - 2y^4 = \square ;$$

la première admet les solutions :

$$x = 1 \qquad y = 1$$
$$x = 13 \qquad y = 1$$
$$x = 1525 \qquad y = 1343$$
$$x = 2 \cdot 165 \cdot 017 \qquad y = 2 \cdot 372 \cdot 159 \ldots ;$$

la seconde admet les solutions[1] :

$$x = 3 \qquad y = 2$$
$$x = 113 \qquad y = 84$$
$$x = 57 \cdot 123 \qquad y = 6 \cdot 214 \ldots$$

Plus loin (p. 386 et 387), LAGRANGE a mis en évidence l'équivalence de chacune de ces deux équations avec l'équation $s^4 + 8t^4 = \square$ du paragraphe précédent. J'ai noté au paragraphe 6 qu'une pièce des *Opera postuma* de L. EULER concernait également l'équivalence des équatione $s^4 + 8t^4 = \square$ et $2x^4 - y^4 = \square$.

Si d'ailleurs on applique à la cubique d'équation

$$x^3 - 2x = y^2$$

la méthode de dérivation des arithmopoints au moyen de la tangente, on trouve que les coordonnées (x_2, y_2) du nouveau point d'intersection de la cubique avec la tangente au point (x_1, y_1) sont fournies par les formules :

$$x_2 = x_1 + 2y \cdot \rho \ , \qquad y_2 = y_1 + (3x^2 - 2)\rho \ ,$$

avec

$$\rho = \frac{16x^2 - 3y^4}{8x^2y^3} = \frac{4 + 12x^2 - 3x^4}{8y^3} \ ;$$

la loi de succession des abscisses est notamment la suivante :

$$x_2 = \left(\frac{x_1^2 + 2}{2y}\right)^2 \ ;$$

[1] Une erreur s'est glissée dans l'édition des *Œuvres* de LAGRANGE (p. 378), où le nombre y de la troisième solution particulière de l'équation $x^4 - 2y^4 = \square$ est égal à 2·614 ; alors que la véritable valeur de ce nombre est celle ci-dessus indiquée (6·214).

la cubique admet une série d'arithmopoints d'abscisses

$$x_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \qquad x_2 = \left(\frac{113}{84}\right)^2, \ldots$$

qui sont toutes des nombres rationnels carrés parfaits.

L'application au problème de FERMAT des principes généraux relatifs aux équations de BRAHMAGUPTA-FERMAT, soit cubiques à zéro rationnel, soit du quatrième degré à premier membre décomposable en un produit de facteurs rationnels du second degré, permet, en résumé, d'expliquer l'origine du problème de TORRICELLI; elle ramène méthodiquement, en outre, la discussion de l'équation de ce problème de FERMAT et d'EV. TORRICELLI à l'analyse de LAGRANGE et d'EULER.

Paris, le 5 février 1918.

REMARQUE SUR L'INTÉGRALE $\int uv\,dx$

PAR

M. Michel PETROVITCH (Belgrade).

Il est manifeste qu'il n'existe aucune fonction u de la variable x telle que l'intégrale définie

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty uv\,dx \tag{1}$$

ait une valeur finie, déterminée et différente de zéro *quel que soit le polynôme* v *en* x.

Un fait curieux est, cependant, à signaler: *il existe des fonctions* u *de* x *pour lesquelles l'intégrale* (1) *a une valeur finie, déterminée et différente de zéro quel que soit le polynôme* v *en* x *à coefficients nombres algébriques* (entiers, com-