Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1918)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ORIGINES D'UN PROBLÈME INÉDIT DE E. TORRICELLI

Autor: Turrière, Emile

Kapitel: Remarque sur les deux dernières conditions du théorème de Torricelli.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18035

Remarque sur les deux dernières conditions du théorème de Torricelli.

13. — Laissant de côté la condition que l'hypoténuse soit mesurée par un carré, prenons l'ensemble des deux conditions :

$$b + c = \square\,, \qquad a + c = \square\,.$$

Il n'est pas possible d'ailleurs de leur adjoindre la condition analogue :

$$a + b = \square\,;$$

si dans un arithmotriangle pythagorique les trois sommes de côtés pris deux à deux étaient, en effet, trois nombres carrés parfaits, les nombres de ce triangle satisferaient aux trois équations :

$$(p + q)^2\lambda = \square\,, \qquad 2p^2\lambda = \square\,, \qquad (p^2 + 2pq - q^2)\lambda = \square\,;$$

et λ serait simultanément un carré et le double d'un carré.

Reste donc à étudier le système des deux conditions :

$$b + c = \square\,, \qquad a + c = \square\,;$$

la seconde permet de limiter le problème aux triangles primitifs ($\lambda = 1$) pour lesquels elle est d'ailleurs *ipso facto* remplie. Le problème est ainsi réductible à une seule équation de Brahmagupta-Fermat du second ordre

$$p^2 + 2pq - q^2 = \square\,,$$

dont la solution générale est

$$\frac{q}{p} = 2\frac{1 - x}{1 + x^2}\,,$$

en fonction d'un paramètre rationnel quelconque x.

On peut encore prendre pour un de ces arithmotriangles pythagoriques, qui ne sont définis qu'à un facteur carré près, celui dont les côtés sont :

$$a = \frac{c^2}{4} + 1 , \qquad b = \frac{c^2}{4} - 1 , \qquad \text{avec} \qquad c = \frac{\lambda^2 + (\lambda - 1)^2}{\lambda} ,$$

λ restant un paramètre arbitraire.

Ce problème est donc de ceux qui se résolvent complètement et dont la solution générale peut être formulée en fonction de deux paramètres.

14. — De la solution générale qui précède de cette question bien simple, résulte immédiatement l'équation dont dépend le problème de Torricelli. Il suffit de poser, à un facteur près sans importance,

$$p = 1 + x^2 , \qquad q = 2(1 - x) ;$$

et de résoudre le problème des arithmodistances pour l'arithmoparabole que représentent, dans le système de coordonnées rectangulaires p et q, ces deux équations paramétriques ; l'équation obtenue,

$$(x^2 + 1)^2 + 4(x - 1)^2 = \square ,$$

est une équation de Brahmagupta-Fermat du quatrième ordre :

$$x^4 + 6x^2 - 8x + 5 = \square .$$

Les solutions acceptables doivent satisfaire en outre à des inégalités qui assurent les signes positifs des cathètes des arithmotriangles pythagoriques correspondants, ainsi que l'ordre de grandeur $c > b$; il faut donc que q soit positif et que le rapport $\frac{p}{q}$ soit compris entre l'unité et $\sqrt{2} + 1$. Des trois inégalités

$$x < 1 < \frac{1 + x^2}{2(1 - x)} < \sqrt{2} + 1 ,$$

il résulte que le nombre rationnel x doit être compris soit dans l'intervalle

$$-(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{\sqrt{2} + 1} < x < -(\sqrt{2} + 1) ,$$

soit dans l'intervalle :

$$\sqrt{2}-1<x<-(\sqrt{2}+1)+2\sqrt{\sqrt{2}+1}\ .$$

En posant

$$x^4+6x^2-8x+5=(x^2+1-2\mu)^2\ ,$$

cette équation indéterminée devient

$$(\mu+1)x^2-2x+1+\mu-\mu^2=0\ ,$$

et la condition de rationalité de x fournit la forme canonique suivante de l'équation du problème :

$$\mu^3-2\mu=\square\ .$$

Le problème de TORRICELLI *est ainsi rattaché à l'étude d'une cubique harmonique d'invariants* $g_2=8,\ g_3=0$.

Cette équation $\mu^3-2\mu=\square$ dérive de l'équation déjà formée $\lambda^3+8\lambda=\square$ par la substitution :

$$\lambda=\mu-\frac{2}{\mu}\ .$$

De la décomposition de certaines équations de Brahmagupta-Fermat.

15. — Soit tout d'abord une équation cubique de BRAHMAGUPTA-FERMAT, telle que le polynôme entier cubique de son premier membre soit doué au moins d'un zéro rationnel ; si x_0 est le zéro rationnel du polynôme cubique $f(x)$, par une transformation $x=x_0+ky$, celui-ci se change en un polynôme $y\,.\,g(y)$, produit par la nouvelle indéterminée y d'un trinôme $g(y)$ du second degré.

L'équation de FERMAT $f(x)=\square$ devient ainsi $y\,.\,g(y)=\square$, ou en explicitant les coefficients :

$$y(Ay^2+By+C)=\square\ ;$$

A, B, C pouvant toujours être considérés comme étant des entiers qui ne sont pas nécessairement premiers entre eux,