

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	20 (1918)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	LES ORIGINES D'UN PROBLÈME INÉDIT DE E. TORRICELLI
Autor:	Turrière, Emile
Kapitel:	Remarque sur les deux dernières conditions du théorème de Torricelli.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-18035

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

**Remarque sur les deux dernières conditions
du théorème de Torricelli.**

13. — Laissant de côté la condition que l'hypoténuse soit mesurée par un carré, prenons l'ensemble des deux conditions :

$$b + c = \square, \quad a + c = \square.$$

Il n'est pas possible d'ailleurs de leur adjoindre la condition analogue :

$$a + b = \square;$$

si dans un arithmotriangle pythagorique les trois sommes de côtés pris deux à deux étaient, en effet, trois nombres carrés parfaits, les nombres de ce triangle satisferaient aux trois équations :

$$(p + q)^2 \lambda = \square, \quad 2p^2 \lambda = \square, \quad (p^2 + 2pq - q^2) \lambda = \square;$$

et λ serait simultanément un carré et le double d'un carré.

Reste donc à étudier le système des deux conditions :

$$b + c = \square, \quad a + c = \square;$$

la seconde permet de limiter le problème aux triangles primitifs ($\lambda = 1$) pour lesquels elle est d'ailleurs *ipso facto* remplie. Le problème est ainsi réductible à une seule équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT du second ordre

$$p^2 + 2pq - q^2 = \square,$$

dont la solution générale est

$$\frac{q}{p} = 2 \frac{1-x}{1+x^2},$$

en fonction d'un paramètre rationnel quelconque x .

On peut encore prendre pour un de ces arithmotriangles

pythagoriques, qui ne sont définis qu'à un facteur carré près, celui dont les côtés sont :

$$a = \frac{c^2}{4} + 1 , \quad b = \frac{c^2}{4} - 1 , \quad \text{avec} \quad c = \frac{\lambda^2 + (\lambda - 1)^2}{\lambda} ,$$

λ restant un paramètre arbitraire.

Ce problème est donc de ceux qui se résolvent complètement et dont la solution générale peut être formulée en fonction de deux paramètres.

14. — De la solution générale qui précède de cette question bien simple, résulte immédiatement l'équation dont dépend le problème de TORRICELLI. Il suffit de poser, à un facteur près sans importance,

$$p = 1 + x^2 , \quad q = 2(1 - x) ;$$

et de résoudre le problème des arithmodistances pour l'arithmoparabole que représentent, dans le système de coordonnées rectangulaires p et q , ces deux équations paramétriques ; l'équation obtenue,

$$(x^2 + 1)^2 + 4(x - 1)^2 = \square ,$$

est une équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT du quatrième ordre :

$$x^4 + 6x^2 - 8x + 5 = \square .$$

Les solutions acceptables doivent satisfaire en outre à des inégalités qui assurent les signes positifs des cathètes des arithmotriangles pythagoriques correspondants, ainsi que l'ordre de grandeur $c > b$; il faut donc que q soit positif et que le rapport $\frac{p}{q}$ soit compris entre l'unité et $\sqrt{2} + 1$. Des trois inégalités

$$x < 1 < \frac{1 + x^2}{2(1 - x)} < \sqrt{2} + 1 ,$$

il résulte que le nombre rationnel x doit être compris soit dans l'intervalle

$$-(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{\sqrt{2} + 1} < x < -(\sqrt{2} + 1) ,$$

soit dans l'intervalle :

$$\sqrt{2} - 1 < x < -(\sqrt{2} + 1) + 2\sqrt{\sqrt{2} + 1} .$$

En posant

$$x^4 + 6x^2 - 8x + 5 = (x^2 + 1 - 2\mu)^2 ,$$

cette équation indéterminée devient

$$(\mu + 1)x^2 - 2x + 1 + \mu - \mu^2 = 0 ,$$

et la condition de rationalité de x fournit la forme canonique suivante de l'équation du problème :

$$\mu^3 - 2\mu = \square .$$

Le problème de TORRICELLI est ainsi rattaché à l'étude d'une cubique harmonique d'invariants $g_2 = 8$, $g_3 = 0$.

Cette équation $\mu^3 - 2\mu = \square$ dérive de l'équation déjà formée $\lambda^3 + 8\lambda = \square$ par la substitution :

$$\lambda = \mu - \frac{2}{\mu} .$$

De la décomposition de certaines équations de Brahmagupta-Fermat.

15. — Soit tout d'abord une équation cubique de BRAHMA-GUPTA-FERMAT, telle que le polynôme entier cubique de son premier membre soit doué au moins d'un zéro rationnel ; si x_0 est le zéro rationnel du polynôme cubique $f(x)$, par une transformation $x = x_0 + ky$, celui-ci se change en un polynôme $y \cdot g(y)$, produit par la nouvelle indéterminée y d'un trinôme $g(y)$ du second degré.

L'équation de FERMAT $f(x) = \square$ devient ainsi $y \cdot g(y) = \square$, ou en explicitant les coefficients :

$$y(Ay^2 + By + C) = \square ;$$

A, B, C pouvant toujours être considérés comme étant des entiers qui ne sont pas nécessairement premiers entre eux,