

# L'origine probable du problème de Torricelli

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

9. — Ainsi donc, le problème de FERMAT dépend analytiquement d'une équation indéterminée qui peut aussi être mise sous la forme :

$$\lambda + \frac{8}{\lambda} = \square .$$

Or il se trouve que LEIBNIZ a rencontré ce genre d'équations,

$$x + \frac{a}{x} = \square ,$$

où figure un nombre rationnel  $a$  (sans rapport avec l'hypoténuse de l'arithmotriangle pythagorique considéré plus haut); il reste trace de ces recherches de LEIBNIZ dans les deux pièces suivantes :

a) *Invenire triangulum rectangulum in numeris cujus area sit quadratus* (29 décembre 1678), *Leibnizens mathematische Schriften*, Gerhardt, [2], III, 1863, p. 120-125.

b) *Exercitium ad promovendam scientiam numerorum*, *ibid.*, [2], III, 1863, p. 114-119.

Dans la première de ces pièces, il est question de l'équation particulière :

$$x - \frac{1}{x} = \square ;$$

tandis que dans la seconde il s'agit de l'équation générale :

$$x + \frac{a}{x} = \square .$$

C'est la seule trace d'un travail de LEIBNIZ sur ce sujet que j'aie pu jusqu'ici retrouver. La question reste donc posée.

### L'origine probable du problème de Torricelli.

10. — Revenons à TORRICELLI et à son problème retrouvé par M. Gino LORIA.

La solution donnée par FERMAT lui-même, retrouvée par BILLY et par EULER

$$a = 4\ 687\ 298\ 610\ 289 ,$$

$$b = 4\ 565\ 486\ 027\ 761 ,$$

$$c = 1\ 061\ 652\ 293\ 520 ,$$

est la plus simple de toutes les solutions en nombre illimité de ce problème, qui peut être rattaché à l'étude arithmogéométrique d'une cubique plane ou d'une biquadratique gauche<sup>1</sup>. Cette propriété est formellement énoncée dans le passage ci-dessus rapporté de la pièce, en date du 15 novembre 1775, des *Miscellanea Analytica* d'EULER. Ce point fut d'ailleurs à nouveau établi par l'analyse remarquable de LAGRANGE<sup>2</sup>, en 1777.

La somme  $a + b$  des valeurs précédentes de l'hypoténuse  $a$  et de la cathète moyenne  $b$  est un nombre (terminé par 50) qui ne saurait être carré parfait. Cette solution la plus simple ne satisfait donc pas à la troisième condition de TORRICELLI; d'où il résulte que le problème de TORRICELLI, s'il est possible *en nombres entiers positifs*, n'admet pas de solutions de moins de treize chiffres. La condition supplémentaire imposée par le disciple de GALILÉE ne fait donc que compliquer un problème déjà dénué de solution simple.

11. — Il se peut pourtant que TORRICELLI ait voulu poser un problème qui n'est guère différent de celui de FERMAT, qui lui est intimement lié et qui admet une solution simple.

L'étude du problème de FERMAT, lorsqu'il est soumis à certaines méthodes de résolution, le rend, en effet, absolument inséparable du problème pour lequel la somme des cathètes est remplacée par leur différence. C'est ce qui se produit notamment dans l'analyse géométrique, au moyen d'une cubique plane ou d'une biquadratique gauche; la somme des cathètes n'est pas alors nécessairement la somme de leurs valeurs arithmétiques.

BILLY a parfaitement rendu compte, dans son analyse, de cette circonstance; il a le premier signalé l'existence d'un arithmotriangle pythagorique remarquable dont les côtés sont des nombres bien simples :

$$a = 169 , \quad b = 120 . \quad c = 119 ;$$

<sup>1</sup> Voir à ce sujet mes « Notions d'arithmogéométrie » dans *L'Enseignement mathématique*, XIX<sup>e</sup> année, mai 1917, p. 167-168.

<sup>2</sup> Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante, Nouveau Mémoire de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1777; *Œuvres de Lagrange*, t. IV, Paris, 1869, pp. 377-398.

ces nombres satisfont aux conditions simultanées :

$$a = \square, \quad b - c = \square.$$

Pour cet arithmotriangle pythagorique la troisième condition de TORRICELLI est satisfaite, que l'on considère la somme ou la différence de l'hypoténuse et de la cathète moyenne, puisque les nombres précédents vérifient les deux conditions

$$a + b = 289 = \square,$$

$$a - b = 49 = \square;$$

il convient de remarquer que ces deux conditions simultanées se réduisent à une seule, puisque le produit  $(a + b)(a - b)$  est égal au carré de la cathète  $c$ .

La véritable signification et l'origine du problème de TORRICELLI se rattachent elles aux remarques qui viennent d'être faites ? C'est possible, mais peu vraisemblable.

12. — L'origine plus probable du problème de TORRICELLI me semble résider dans la remarque que, si la somme des côtés  $a + b$  n'est pas un carré, dans l'exemple donné par FERMAT, par contre la *somme de l'hypoténuse et du plus petit côté est un carré* :

$$a + c = 5 \cdot 748 \cdot 950 \cdot 903 \cdot 809 = (2 \cdot 397 \cdot 697)^2.$$

Indépendamment de ce fait particulier et d'une manière plus générale, un *triangle en nombres* (selon l'expression des géomètres du XVII<sup>e</sup> siècle) étant représenté par les nombres entiers  $p$  et  $q$ , les côtés sont exprimables par les formules

$$a = (p^2 + q^2) \cdot \lambda, \quad b = (p^2 - q^2) \cdot \lambda, \quad c = 2pq \cdot \lambda,$$

dans lesquelles  $\lambda$  est un paramètre entier de similitude : ce sont les formules de BRAHMAGUPTA. Les trois conditions

$$a = \square, \quad a + c = \square, \quad b + c = \square,$$

deviennent dans ce mode de représentation :

$$(p^2 + q^2)\lambda = \square, \quad (p + q)^2\lambda = \square, \quad (p^2 + 2pq - q^2)\lambda = \square;$$

la seconde n'est autre que  $\lambda = \square$ ; le triangle à côtés premiers entre eux semblable à un triangle de cette espèce, triangle qui s'obtient en prenant  $\lambda = 1$  et  $p$  et  $q$  premiers entre eux, remplit *ipso facto* cette condition. Abstraction faite d'une similitude assez banale, il y a donc lieu de se borner à ce cas des triangles à côtés premiers entre eux, triangles que FRÉNICLE a nommés *triangles primitifs*.

De ce qui précède, il résulte donc que *dans tout triangle primitif la somme de l'hypoténuse et d'une des deux cathètes est toujours un nombre carré*. Cette propriété bien simple ne pouvait pas être inconnue de TORRICELLI.

Tout s'explique donc. Dans l'exemple de FERMAT, le triangle primitif dont les *nombres* sont

$$p = 2\ 150\ 905 ,$$

$$q = 246\ 792 ,$$

c'est la somme de l'hypoténuse et de la plus petite cathète qui se trouve être un carré parfait. Cette circonstance se produit toutes les fois que l'inégalité

$$p^2 - q^2 > 2pq ,$$

est vérifiée, c'est-à-dire lorsque le rapport  $\frac{p}{q}$  des nombres du triangle ( $p$  étant le plus grand des deux nombres) est supérieur à  $\sqrt{2} + 1$ . Dans le cas actuel, cette condition est manifestement remplie,  $\frac{p}{q}$  étant de l'ordre de 8.

Le problème de TORRICELLI consiste précisément à rechercher un triangle primitif, appartenant à cette famille des solutions du problème de FERMAT, mais pour lequel le rapport  $\frac{p}{q}$  des deux nombres du triangle soit inférieur à la limite précédente  $\sqrt{2} + 1$ . Et nous devons conclure que *la condition supplémentaire de TORRICELLI est une simple condition d'inégalité, le problème de TORRICELLI étant analytiquement identique à celui de FERMAT*.