4. — Dérivabilité de la représentation. Ordre de l'approximation.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

pectivement par A et B, on obtient la représentation trigonométrique cherchée.

Ce procédé ne résout pas la difficulté, si l'on considère des fonctions indéfiniment dérivables. Cela fait, entre les deux problèmes inverses que nous venons de traiter, une différence qui reste profonde. La solution du premier est plus radicale que celle du second.

4. — Dérivabilité de la représentation. Ordre de l'approximation.

Ces deux questions sont liées par d'étroites relations, qui n'ont été éclaircies que récemment et que nous approfondirons dans un autre paragraphe (6). Cependant, sans que leur dépendance ait été aperçue dès le début, elles ont été traitées dans les mêmes Mémoires et, plus tard, on en a fait l'étude combinée. Il est impossible de les séparer.

Nous allons donc les étudier ensemble, mais en nous bornant pour le moment à la seule approximation par polynômes.

La question de représenter $f(x)$ par une série dérivable de polynômes a été posée par M. Painlevé dès 1898. M. Painlevé a montré que si la fonction $f(x)$ a des dérivées continues, elle est exprimable en série uniformément convergente de polynômes, telle que les séries dérivées convergent aussi uniformément vers les dérivées de $f(x)$. M. E. Borel est revenu sur cette question dans sa Thèse et dans ses *Leçons* de 1905 sur les fonctions de variables réelles.

La question de l'ordre de l'approximation est plus récente. Elle a été posée en 1908 par M. Lebesgue (10), à l'occasion du polynôme de Landau,

$$P_n = \frac{k_n}{2} \int_0^1 f(t)\,[1 - (t - x)^2]^n\,dt\ ,$$

qui, pour n infini, converge uniformément vers $f(x)$ dans tout intervalle (a, b) intérieur à $(0, 1)$.

Le maximum de $|f - P_n|$, ou l'approximation ρ_n, tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, mais *quel est l'ordre de grandeur de* ρ_n ?

Telle est la question de l'ordre de l'approximation que M. Lebesgue s'est posée, mais n'a traitée que très sommairement dans ce premier article.

Je m'étais posé la même question, avant la publication de la Note de M. Lebesgue, et mes résultats ont paru, peu après, dans un Mémoire étendu (3) de l'Académie royale de Belgique (1908). Les deux questions, dérivabilité et ordre de l'approximation, reçoivent ici des solutions plus précises que dans les travaux précédents. Je prouve, en particulier, que le problème de la dérivabilité est entièrement résolu par le polynôme de Landau. En effet, *une dérivée d'ordre quelconque de* P_n *converge vers la dérivée du même ordre de* $f(x)$ *au point* x, *sous la seule condition que cette dérivée existe en ce point.* C'est là la supériorité du polynôme de Landau : *La continuité de la dérivée n'est pas requise.* Les autres procédés que nous allons étudier seront, sans doute, beaucoup plus parfaits au point de vue de l'approximation, mais ils perdent cet avantage : les conditions de leur dérivabilité exigent la continuité.

C'est encore dans mon Mémoire cité de 1908 que se trouvent les premiers résultats définitifs sur l'ordre de l'approximation. Je prouve que *si la fonction* $f(x)$ *est lipschitzienne, l'approximation obtenue par le polynôme de Landau est de l'ordre de* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *au plus.*

Cette approximation n'est pas la meilleure qu'on puisse obtenir dans cette hypothèse générale. M. Lebesgue, en 1910 (11), a obtenu l'ordre $\frac{\log n}{n}$ et enfin, en 1911, M. D. Jackson (8) a obtenu l'ordre $\frac{1}{n}$, qui ne peut plus être abaissé. Je vais y revenir. Cependant j'ai donné moi-même le premier exemple d'une meilleure approximation dans un autre Mémoire (12), présenté à l'Académie royale de Belgique la même année 1908 et publié le mois suivant. Prenant cette fois mon point de départ dans l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b f(t)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt\,,$$

qui jouit de propriétés analogues à celles de Dirichlet, j'ai montré que *toute fonction dont la dérivée est à variation bornée peut être représentée par un polynôme de degré* n *avec une approximation de l'ordre de* $\frac{1}{n}$. C'était, je pense, le premier exemple d'un ordre qui ne peut plus être abaissé.

Toutefois, comme je viens de le dire, on peut assigner une approximation du même ordre dans l'hypothèse, bien plus générale, où la fonction $f(x)$ est lipschitzienne. Mais ceci n'a été démontré que trois ans plus tard et c'est un cas particulier d'un théorème plus général que M. D. Jackson (8) a énoncé dans sa dissertation inaugurale de 1911. M. D. Jackson consacre un chapitre entier de cette dissertation à l'approximation simultanée de $f(x)$ et de ses $k-1$ premières dérivées dans l'hypothèse où la dernière est lipschitzienne. Il raisonne pour cela sur une combinaison ingénieuse d'intégrales absolument convergentes du type

$$\int f(x+\lambda t)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^k dt\ ,$$

où λ et k sont des entiers, ce dernier suffisamment grand. Il construit un polynôme qui fournit une approximation de l'ordre de $\frac{1}{n^k}$ et dont la dérivée d'ordre $r \leqq k$ fournit, pour $f^{(r)}(x)$, une approximation de l'ordre de $\frac{1}{n^{k-r}}$. En particulier, on obtient le résultat énoncé plus haut si $k=1$: l'approximation de $f(x)$ lipschitzienne est de l'ordre de $\frac{1}{n}$.

Ces théorèmes de M. D. Jackson sont définitifs, mais pour les fonctions seulement qui n'admettent qu'un nombre limité de dérivées successives. Ils n'ont plus rien de commun avec la meilleure approximation quand toutes les dérivées existent.

Si la fonction $f(x)$ est indéfiniment dérivable, la méthode du développement en *série de polynômes trigonométriques*, que M. Bernstein (6) a utilisée dans son Mémoire couronné (1912), est plus simple et bien préférable. Ce développement qui, comme nous l'avons vu, se déduit de celui de $f(\cos\varphi)$ en série de Fourier, donne la meilleure solution connue de

la représentation indéfiniment dérivable. Dans cette hypothèse, l'approximation de chaque dérivée est indéfiniment petite d'ordre supérieur à toute puissance de $\frac{1}{n}$. Réciproquement, l'existence d'un tel degré d'approximation assure celle de toutes les dérivées. Nous en reparlerons plus loin.

5. — Approximation minimum.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b). Parmi les polynômes de degré donné n, il en existe un, P_n, qui donne la meilleure approximation, tel donc que l'approximation soit minimum. Nous appellerons cette meilleure approximation *approximation minimum*, et le polynôme qui la donne est le *polynôme d'approximation* (ou d'approximation minimum).

La considération de ce polynôme remonte à une époque déjà ancienne, elle est due à Tchebycheff (7) (1859). Le grand géomètre russe a consacré une partie importante de son œuvre à l'étude de l'approximation par des fonctions rationnelles (entières ou fractionnaires). Mais l'importance des découvertes de Tchebycheff pour notre objet actuel n'est apparue qu'après le Mémoire de M. S. Bernstein (1912). Tant pour la valeur des matériaux réunis que par le mérite de l'invention, la place qui revient à Tchebycheff dans la théorie qui nous occupe est encore la première.

Tchebycheff, comme cela était naturel de son temps, admettait sans démonstration l'existence du polynôme d'approximation minimum. Cette démonstration a été donnée par M. Borel dans ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les séries de polynômes* (1905) (13). M. Borel a montré que le polynôme d'approximation minimum dans un intervalle (a, b) est unique et qu'il est caractérisé par la propriété suivante : la différence $f(x) - P_n$ acquiert sa valeur absolue minimum avec des signes alternés en $n + 2$ points consécutifs de l'intervalle (a, b). Ce maximum absolu est l'*approximation minimum* ρ_n. Il suit de cette propriété que le polynôme d'approximation est un *polynôme de Lagrange*