

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1918)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE  
**Autor:** de la Vallée Poussin, C.  
**Kapitel:** 3. — Réduction des deux modes d'approximation l'un à l'autre.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18019>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

de l'approximation d'une fonction continue quelconque à celle d'une ligne polygonale. Voici maintenant comment il ramène l'approximation d'une telle ligne à celle de  $|x|$ .

Soient  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)$  les sommets de la ligne polygonale dont il faut représenter approximativement l'ordonnée entre les abscisses  $x_1$  et  $x_n$ . Remarquons que la fonction

$$\varphi_k(x) = |x - x_k| + (x - x_k)$$

est nulle pour  $x \leq x_k$  et égale à  $2(x - x_k)$  pour  $x \geq x_k$ .

Posons

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x)$$

où  $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$  sont  $n$  constantes à déterminer. Cette fonction varie linéairement entre deux abscisses consécutives  $x_k$  et  $x_{k+1}$ . Donc, pour l'identifier à la ligne polygonale, il suffit d'amener la coïncidence des sommets. Faisons  $x = x_i$ , nous obtenons ainsi la condition

$$y_i = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{i-1} a_k (x_i - x_k)$$

Ceci constitue, pour  $i = 1, 2, \dots n$ , un système récurrent, qui détermine de proche en proche  $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$ . Ainsi l'approximation de l'ordonnée  $F(x)$  de la ligne polygonale est ramenée à celle de  $\varphi_k(x)$  ou de  $|x - x_k|$  et, en définitive, à celle de  $|x|$ .

### 3. — Réduction des deux modes d'approximation l'un à l'autre.

Les deux modes d'approximation se ramènent l'un à l'autre, l'approximation par polynômes à une approximation trigonométrique et, inversement, l'approximation trigonométrique à une approximation par polynômes.

Les deux problèmes ont été résolus dès le début, mais le problème direct, qui a pour objet de déduire l'approximation par polynômes d'une approximation trigonométrique, est le

plus simple. On en trouve déjà une solution très naturelle dans le *Traité d'Analyse* de M. E. Picard. Elle consiste à remplacer, dans le développement trigonométrique suffisamment approché, chacune des lignes trigonométriques par un polynôme suffisamment approché tiré de la formule de Taylor. Mais, malgré sa simplicité, ce procédé n'est pas le meilleur. Il en existe un autre, bien plus parfait, qui fait rentrer l'approximation par polynômes comme simple cas particulier dans l'approximation trigonométrique. Il est même étonnant que ce procédé n'ait été utilisé que si tardivement. C'est M. Bernstein qui en a montré les avantages dans son Mémoire couronné de 1912 (6).

Soit à représenter une fonction continue  $f(x)$  par des polynômes dans l'intervalle  $(-1, +1)$ . Tout autre intervalle se ramènerait à celui-là par une substitution linéaire. Posons, avec M. Bernstein,

$$x = \cos \varphi ,$$

ce qui transforme  $f(x)$  en  $f(\cos \varphi)$ , qui est une fonction paire et périodique de  $\varphi$ . Je dis que *l'approximation de  $f(x)$  par des polynômes en  $x$  et celle de  $f(\cos \varphi)$  par des expressions trigonométriques en  $\varphi$ , sont deux problèmes complètement équivalents.*

Supposons, en effet, que nous ayons, avec une certaine approximation, la représentation trigonométrique

$$f(\cos \varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + \dots + a_n \cos n \varphi ;$$

et remarquons que  $\cos k\varphi$  est un polynôme,  $T_k(\cos \varphi)$ , de degré  $k$  en  $\cos \varphi$ . Nous aurons, avec la même approximation, la représentation par polynômes que nous cherchons

$$f(x) = a_0 + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x) .$$

Les polynômes  $T_1(x)$ ,  $T_2(x)$ , ... sont ce que M. Bernstein appelle des *polynômes trigonométriques*. Ils ont été considérés, bien avant lui, par le grand mathématicien russe Tchebycheff (7) (1859), qui en a signalé des propriétés de la plus haute importance pour notre objet. M. Bernstein en a tiré le plus heureux parti. En particulier, il a montré, dans

son Mémoire cité, les avantages inattendus que présente le développement de  $f(x)$  en série de polynômes trigonométriques, et il appelle ainsi la série de polynômes qui se déduit de la série de Fourier de  $f(\cos \varphi)$  par la transformation précédente. C'est ainsi, entre autres, qu'il a effectué le développement de  $|x|$  en série de polynômes et il a obtenu, pour cette fonction, la meilleure représentation connue jusqu'à lui.

La substitution de M. Bernstein possède, au point de vue de notre étude, un avantage sur l'importance duquel il faut insister : elle n'altère pas les propriétés différentielles. La fonction  $x = \cos \varphi$  est continue ainsi que toutes ses dérivées, de sorte que si les dérivées d'un certain ordre de  $f(x)$  sont continues par rapport à  $x$ , elles le sont encore par rapport à  $\varphi$ . Grâce à cette continuité, la substitution de Bernstein ne jette aucun trouble dans l'étude combinée de l'approximation et des propriétés différentielles de  $f(x)$ . Aussi bien, plus tard, quand nous ferons cette étude, il nous suffira de parler de l'approximation trigonométrique. Tous les résultats peuvent se traduire dans l'autre mode par la substitution précédente.

Le problème inverse ne présente pas les mêmes facilités. Il a pour objet de ramener l'approximation trigonométrique à une approximation par polynômes. Il a d'abord été traité par M. Lebesgue dans son premier Mémoire de 1898 (5). Il se résout naturellement par la substitution  $u = \cos x$ , inverse de celle de Bernstein, et que nous appellerons *la substitution de Lebesgue*. Mais celle-ci se heurte immédiatement à deux objections.

La première, c'est que  $x$  et, par suite,  $f(x)$  ne sont pas des fonctions uniformes de  $\cos x = u$ ; la seconde vient de la discontinuité des dérivées de  $x = \arccos u$  par rapport à  $u$  aux deux limites  $\pm 1$ , ce qui change les propriétés différentielles de la fonction.

M. Lebesgue a résolu la première difficulté dans son Mémoire de 1898. La seconde ne se posait pas encore à cette époque. Elle a été résolue, au moins partiellement, par M. D. Jackson dans sa dissertation inaugurale de 1911 (8). M. Jackson précise pour cela la méthode de M. Lebesgue,

mais il se borne à la considération d'un nombre limité de dérivées successives.

Je n'exposerai pas ces démonstrations telles quelles. Je vais les remplacer par deux autres, qui s'inspirent au fond des mêmes idées, mais qui me paraissent plus simples.

Voici d'abord comment je modifierais la démonstration de M. Lebesgue, en vue de tourner la première difficulté seulement.

Soit  $f(x)$  une fonction continue de période  $2\pi$ ; les deux fonctions

$$f(x) + f(-x) , \quad [f(x) - f(-x)] \sin x ,$$

sont des fonctions paires de période  $2\pi$ , donc des fonctions *uniformes* de  $\cos x = u$ , que nous pouvons désigner par  $\varphi(u)$  et  $\psi(u)$  et la multiplicité des valeurs de arc  $\cos x$  n'intervient pas. Je dis que l'approximation trigonométrique de  $f(x)$  revient à l'approximation par polynômes de  $\varphi(u)$ , de  $\psi(u)$  et de deux autres fonctions analogues.

Soient, en effet,  $P_n(u)$  et  $Q_n(u)$  des polynômes de degré  $n$  tels qu'on ait approximativement

$$\varphi(u) = P_n(u) , \quad \psi(u) = Q_n(u) ;$$

on aura, avec la même approximation,

$$\begin{aligned} [f(x) + f(-x)] \sin^2 x &= P_n(\cos x) \sin^2 x , \\ [f(x) - f(-x)] \sin^2 x &= Q_n(\cos x) \sin x , \end{aligned}$$

d'où la relation approchée

$$2f(x) \sin^2 x = P_n(\cos x) \sin^2 x + Q_n(\cos x) \sin x . \quad (1)$$

Remplaçons, dans le calcul précédent, la fonction  $f(x)$  par la fonction  $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ; il viendra approximativement,  $R_n(u)$  et  $S_n(u)$  étant de nouveaux polynômes,

$$2f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin^2 x = R_n(\cos x) \sin^2 x + S_n(\cos x) \sin x$$

et, en changeant  $x$  en  $x - \frac{\pi}{2}$ ,

$$2f(x) \cos^2 x = R_n(\sin x) \cos^2 x - S_n(\sin x) \cos x . \quad (2)$$

Il suffit d'ajouter membre à membre les deux relations approchées (1) et (2) et l'on obtient l'expression trigonométrique approchée de  $f(x)$ .

Il n'est pas difficile de modifier cette démonstration de manière à écarter la seconde difficulté, dans la mesure même où elle a été surmontée par M. D. Jackson. Voici la manière de procéder :

Supposons que  $f(x)$  et ses dérivées soient continues jusqu'à l'ordre  $r$ . Il s'agit de ramener l'approximation trigonométrique de  $f(x)$  à l'approximation par polynômes de certaines fonctions de  $u$  ayant des dérivées en  $u$  continues jusqu'à l'ordre  $r$ . Toute la difficulté provient de la présence de  $\sin x$  qui s'annule au dénominateur de la formule de dérivation :

$$\frac{d}{du} = \frac{d}{d \cos x} = - \frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx} .$$

Il suffit, pour la faire disparaître, d'introduire  $\sin^r x$  en facteur dans la définition des fonctions  $\varphi(u)$  et  $\psi(u)$  qui précèdent. Cela permet, en effet, de faire disparaître, comme facteur commun aux deux termes de la fraction, cette expression  $\sin x$  qui provoque la difficulté.

Posons donc

$$\varphi(u) = [f(x) + (-1)^r f(-x)] \sin^r x ,$$

$$\psi(u) = [f(x) - (-1)^r f(-x)] \sin^{r+1} x .$$

Soient  $P_n(u)$  et  $Q_n(u)$  des polynômes approchés de  $\varphi(u)$  et de  $\psi(u)$ ; on aura, comme dans le cas précédent,

$$2f(x) \sin^{r+1} x = P_n(\cos x) \sin x + Q_n(\cos x) ;$$

ensuite, toujours comme précédemment,

$$2f(x) \cos^{r+1} x = R_n(\sin x) \cos x + S_n(\sin x) .$$

Or on peut toujours déterminer deux polynômes A et B en  $\sin x$  et  $\cos x$  vérifiant l'identité

$$A \sin^{r+1} x + B \cos^{r+1} x = 1 .$$

On ajoute les deux relations précédentes multipliées res-

pectivement par A et B, on obtient la représentation trigonométrique cherchée.

Ce procédé ne résout pas la difficulté, si l'on considère des fonctions indéfiniment dérivables. Cela fait, entre les deux problèmes inverses que nous venons de traiter, une différence qui reste profonde. La solution du premier est plus radicale que celle du second.

#### 4. — Dérivabilité de la représentation. Ordre de l'approximation.

Ces deux questions sont liées par d'étroites relations, qui n'ont été éclaircies que récemment et que nous approfondirons dans un autre paragraphe (6). Cependant, sans que leur dépendance ait été aperçue dès le début, elles ont été traitées dans les mêmes Mémoires et, plus tard, on en a fait l'étude combinée. Il est impossible de les séparer.

Nous allons donc les étudier ensemble, mais en nous bornant pour le moment à la seule approximation par polynômes.

La question de représenter  $f(x)$  par une série dérivable de polynômes a été posée par M. Painlevé dès 1898. M. Painlevé a montré que si la fonction  $f(x)$  a des dérivées continues, elle est exprimable en série uniformément convergente de polynômes, telle que les séries dérivées convergent aussi uniformément vers les dérivées de  $f(x)$ . M. E. Borel est revenu sur cette question dans sa Thèse et dans ses *Leçons* de 1905 sur les fonctions de variables réelles.

La question de l'ordre de l'approximation est plus récente. Elle a été posée en 1908 par M. Lebesgue (10), à l'occasion du polynôme de Landau,

$$P_n = \frac{k_n}{2} \int_0^1 f(t) [1 - (t - x)^2]^n dt ,$$

qui, pour  $n$  infini, converge uniformément vers  $f(x)$  dans tout intervalle  $(a, b)$  intérieur à  $(0, 1)$ .

Le maximum de  $|f - P_n|$ , ou l'approximation  $\rho_n$ , tend vers 0 avec  $\frac{1}{n}$ , mais *quel est l'ordre de grandeur de  $\rho_n$ ?*