

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1917)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  
  
**Kapitel:** Société mathématique suisse

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Société mathématique suisse.

Zurich, 11 septembre 1917.

La Société mathématique suisse a tenu sa huitième réunion ordinaire à Zurich, le 11 septembre 1917, sous la présidence de M. le Prof. Marcel GROSSMANN (Zurich), à l'occasion de la réunion annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles.

Voici les résumés des communications, au nombre de quinze, présentées à la séance ou dont les mémoires ont simplement été annoncés, en l'absence de leur auteur.

1. — M. le Prof. A. EMCH (Urbana, E.-U.). — *Sur les courbes planes qui ont pour foyers réels, dans le plan complexe, les racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité.* — I. Soit

$$\Phi(u, v, w) = 0 \quad (1)$$

l'équation d'une courbe de  $n^{\text{ième}}$  classe en coordonnées homogènes et

$$u\xi + v\eta + w\zeta = 0$$

l'équation d'une droite.

Les coordonnées cartésiennes correspondantes sont définies par

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{\zeta};$$

dans ce cas

$$-\xi - i\eta + (x + iy)\zeta = 0 \quad (2)$$

est l'équation d'une droite qui passe par le point  $(x, y)$  et par un des points cycliques du plan. Les coordonnées homogènes de la ligne (2) sont

$$\rho u = -1, \quad \rho v = -i, \quad \rho w = x + iy.$$

Si donc,  $x$  et  $y$  sont déterminées de telle sorte que

$$\Phi(-1, -i, x + iy) = 0 \quad (3)$$

soit satisfaite par  $x$  et  $y$ , la tangente à (1) définie par (2) passera par le point réel  $(x, y)$  et un des points cycliques. En conséquence,  $(x, y)$  est un foyer réel de la courbe (1). Il résulte de (3) qu'il y a, en général  $n$  foyers réels de ce genre; on les obtient en mettant (3) sous la forme

$$f(x, y) + ig(x, y) = 0 \quad (4)$$

et en cherchant les solutions communes à

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad g(x, y) = 0.$$

Nous obtenons ainsi les  $n$  foyers réels et les  $n(n-1)$  foyers imaginaires de la courbe (1).

Après avoir rappelé ces faits connus, nous allons déterminer celles des courbes (1) qui possèdent pour foyers, dans le plan complexe, les racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité.

L'équation (3) prend alors la forme

$$-1 + (x + iy)^n = 0 \quad (5)$$

et (1) devient

$$a_0 u^n + a_1 u^{n-1} v + a_2 u^{n-2} v^2 + \dots + a_n v^n + w^n = 0 \quad (6)$$

Dans cette égalité les coefficients doivent être choisis de telle sorte que

$$\begin{aligned} a_0 (-1)^n + a_1 (-1)^{n-1} (-i) + a_2 (-1)^{n-2} (-i)^2 + \dots \\ + a_n (-i)^n + 1 \equiv 0 \end{aligned}$$

soit identiquement nul, ce qui peut être réalisé d'une infinité de manières; par suite, chaque  $n$  fournit une classe infinie de semblables courbes.

L'équation cartésienne s'obtient par le procédé d'élimination habituel. Parmi les nombreuses classes de courbes ainsi obtenues, signalons le cas dans lequel (6) prend la forme

$$\Phi \equiv u^{n-2k} \cdot v^{2k} - w^n = 0, \quad (7)$$

où  $k$  est pair ou impair en même temps que  $n$ .

Une transformation facile, un peu longue toutefois, donne l'équation de la courbe (7) en coordonnées cartésiennes

$$x^{n-2k} \cdot y^{2k} = (-1)^{n-2k} \cdot \frac{(2k)^{2k}}{n^n (n-2k)^{2k-n}}.$$

C'est une hyperbole d'ordre  $n$ . Les foyers de cette courbe sont réels; ils sont aux sommets du polygone régulier de  $n$  côtés inscrits dans le cercle de rayon 1, le point  $(1, 0)$  étant un des sommets.

Lorsqu'on a

$$-1 + (x + iy)^2 = 0,$$

on obtient naturellement un système d'hyperboles et d'ellipses homofocales.

La courbe (7) est rationnelle; ses équations paramétriques se

déterminent facilement. Les points à l'infini de l'axe des  $x$  et de l'axe des  $y$  constituent respectivement

$$\frac{(n-1)(2k-1)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)(n-2k-1)}{2},$$

soit ensemble  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  points doubles.

2. — M. le D<sup>r</sup> G. PÓLYA (Zurich). — *Sur les propriétés arithmétiques des séries entières, qui représentent des fonctions rationnelles.* — I. L'intégrale d'une fonction rationnelle ne peut pas être développée en série entière à coefficients entiers, excepté le cas où elle est elle-même rationnelle.

II. — En développant une fonction rationnelle en série de MacLaurin à coefficients rationnels, les dénominateurs de ceux-ci seront composés d'un nombre fini de facteurs premiers (cas trivial d'un théorème d'Eisenstein). Quand arrive-t-il, que les *numérateurs* aient la même propriété?

Voici la réponse, qu'on obtient en combinant les éléments de la théorie des idéaux avec certaines considérations sur les séries entières : toutes les séries en question peuvent être déduites de la seule série

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

par l'application répétée (un nombre fini de fois) des opérations suivantes :

1. Addition d'un polynôme.
2. Multiplication de la série par  $ax^n$ .
3. Changement de variable  $x \mid ax$ .
4. Changement de variable  $x \mid x^m$ .
5. Addition des deux séries telles que le coefficient de  $x^n$  soit  $= 0$  dans une des deux au moins, pour  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

3. — M. le D<sup>r</sup> A. OSTROWSKI (Marburg a. d. L.) et M. le D<sup>r</sup> G. PÓLYA (Zurich). — *Sur les polynômes à valeurs entières dans un corps algébrique.* — Nous dirons d'un polynôme  $P(x)$  qu'il est à valeurs entières dans un corps algébrique  $K$ , si  $P(\xi)$  est un entier algébrique appartenant à  $K$  pour tous les entiers  $\xi$  de  $K$ . Un polynôme à valeurs entières de degré  $m$  est nécessairement de la forme

$$\frac{\alpha x^m + \beta x^{m-1} + \dots + \lambda}{m!},$$

$\alpha, \beta, \dots, \lambda$  étant des entiers appartenant à  $K$ .



Envisageons l'ensemble de tous les entiers  $\alpha$  tels que  $\frac{\alpha}{m!} x^m$  soit le terme le plus élevé d'un polynôme à valeurs entières de degré  $m$ . Cet ensemble d'entiers est un certain *idéal* dans  $K$ , que nous désignerons par  $\alpha_m$ . Le résultat principal de notre analyse est le calcul explicite de  $\alpha_m$ . Désignons par  $p_1, p_2, \dots, p_l$  les idéaux premiers divisant  $m!$ , par  $N_1, N_2, \dots, N_l$  leurs normes, et posons

$$k_i = \left[ \frac{m}{N_i} \right] + \left[ \frac{m}{N_i^2} \right] + \left[ \frac{m}{N_i^3} \right] + \dots$$

On a

$$\alpha_m p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l} = (m!) \quad (I)$$

Les polynômes à valeurs entières dans le corps des nombres rationnels sont, comme on sait, de la forme

$$a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x(x-1)}{1.2} + \dots + a_m \frac{x(x-1) \dots (x-m+1)}{1.2 \dots m},$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  étant des entiers rationnels. Les polynômes

$$1, \quad x, \quad \frac{x(x-1)}{1.2}, \quad \dots, \quad \frac{x(x-1) \dots (x-m+1)}{1.2 \dots m}, \quad \dots$$

forment donc une espèce de « base » des polynômes à valeurs entières. La condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une base analogue dans un corps algébrique  $K$  quelconque est la suivante : Il faut que tous les idéaux  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \dots$  soient des idéaux principaux (Hauptideale). Cette condition se transforme facilement à l'aide de (I) : En formant le produit de tous les idéaux premiers *de même degré*, qui divisent un nombre rationnel  $p$ , il faut que ce produit soit un idéal principal pour  $p$  quelconque. Ainsi, dans un corps de Galois (Normalkörper) l'existence de la base ne dépend que des diviseurs du discriminant (Grundzahl). Par exemple, la base existe dans tous les corps engendrés par une racine primitive de l'unité de degré premier.

On peut résoudre la question de l'existence d'une base aussi dans le cas des polynômes à valeurs entières qui dépendent de plusieurs variables. La condition est la même.

4. — M. le Dr Ferd. GONSETH (Zurich). — *Un théorème relatif à deux ellipsoïdes confocaux*. — Le théorème dont il s'agit est une extension à l'espace du théorème bien connu de Graves :

Si un fil passé autour d'une ellipse est tendu par une pointe, celle-ci peut décrire une ellipse confocale à la première.

L'analogue de l'espace s'énonce comme suit :

THÉORÈME : Si d'un point  $P$  on mène le cône tangent à un ellipsoïde, et qu'on calcule l'intégrale de la courbure moyenne étendue à la surface fermée, convexe, formée par le cône arrêté aux points de contact et par la portion de l'ellipsoïde qui lui fait suite, cette intégrale reste constante si  $P$  décrit un ellipsoïde confocal au premier.

La méthode de démonstration est exposée d'abord pour le théorème de Graves. L'intégrale  $\iint dp d\varphi$  étendue au domaine  $(\varphi, p)$  d'un ensemble de droites  $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$  est, d'après CROFTON, la mesure de cet ensemble. En particulier la mesure des droites qui rencontrent une courbe convexe fermée est égale à l'intégrale de sa largeur, c'est-à-dire — fait connu — à son périmètre.

D'autre part, les mêmes droites étant  $ux + vy + 1 = 0$ , on reconnaîtra que la mesure est égale à la surface non-euclidienne de l'ensemble des points de coordonnées rectangulaires

$$x = u, \quad y = v, \quad (1)$$

dans un plan dont la conique absolue est  $x^2 + y^2 = 0$ .

Soient maintenant  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  deux ellipses confocales; un point  $P$  de  $\varepsilon_1$ , avec sa tangente  $t$ , d'où l'on mène les tangentes  $a$  et  $b$ , à  $\varepsilon_2$ . Cette figure est transformée par la transformation définie par les formules (1). On obtient deux coniques  $\varepsilon'_1$  et  $\varepsilon'_2$ ; une tangente  $p$  à  $\varepsilon'_1$ , avec son point de contact  $T$ , coupe  $\varepsilon'_2$  en  $A$  et  $B$ .

Le théorème de Graves sera exact si l'aire non-euclidienne (au sens défini plus haut) de la portion de plan située à l'extérieur de la courbe fermée convexe formée par le segment  $AB$  et une portion de l'ellipse  $\varepsilon'_2$  est constante lorsque  $p$  varie. On mènera une tangente voisine, et il suffira de prouver l'égalité de deux triangles infiniment petits. Cette égalité résulte du fait que  $T$  est au milieu (non-euclidien) de  $AB$ , puisque  $t$  est la bissectrice de  $a$  et  $b$ .

Dans l'espace, on définit semblablement la mesure d'un ensemble de plans

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

ou bien

$$ux + vy + wz + 1 = 0;$$

on la reconnaîtra égale au volume non-euclidien de l'ensemble des points de coordonnées rectangulaires  $x = u, y = v, z = w$ , dans un espace dont la quadrique absolue est  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ .

En particulier la mesure des plans qui coupent une surface fermée convexe vaut l'intégrale de la largeur, et d'après une formule de M. HURWITZ, l'intégrale de la courbure moyenne de cette surface.

Le reste de la démonstration se calquera sur la précédente.

5. — M. le Prof. Dr L. KOLLROS (Zurich). — *Propriétés métriques des courbes algébriques*. Toute propriété *métrique* peut être considérée comme *projective* si l'on fait intervenir les éléments absolus : la droite à l'infini et les points cycliques (pour la géométrie euclidienne plane). On peut donc transformer les propriétés métriques par une collinéation ou une réciprocité, et l'on arrive à des rapprochements entre des théorèmes qui paraissent très différents. Ainsi, le théorème de Carnot sur les courbes algébriques planes coupées par un triangle devient — par une réciprocité dans laquelle les points cycliques correspondent à deux côtés du triangle — le théorème suivant de Laguerre : Si par un point on mène les  $n$  tangentes à une courbe algébrique plane de classe  $n$  et si l'on joint ce point aux  $n$  foyers réels de la courbe, les deux faisceaux de droites ainsi obtenues ont même orientation<sup>1</sup>.

Dans les deux théorèmes, le produit de  $n$  rapports anharmoniques  $(T_i OAB)$  est constant,  $O, A, B$  étant fixes et les  $T_i$  variables. Dans le théorème de Laguerre, les points  $T_i, O, A, B$  sont tous à l'infini ;  $A$  et  $B$  sont les points cycliques ;  $O$  est le point à l'infini de l'axe-origine des angles.

Si  $B$  tend vers  $A$ , cette condition devient : 
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i A} = \text{const.};$$

elle exprime que le pôle harmonique  $P$  de  $A$  par rapport au système des  $n$  points variables  $T_i$  est fixe. Si  $A$  est à l'infini,  $P$  est le centre de gravité des points  $T_i$ . D'autre part, un foyer, point d'intersection de deux tangentes isotropes, doit être remplacé par le point de contact d'une tangente menée de  $A$  à la courbe. Une réciprocité telle que le point  $A$  devienne la droite à l'infini remplace les points de contact des tangentes à la courbe issues de  $A$  par les asymptotes de la courbe transformée. Ainsi, à un théorème où un système de droites variables a une orientation constante, correspond un théorème où un système de points variables a un centre de gravité fixe. De plus, à un foyer de la première figure correspond une asymptote de la seconde.

Exemples : 1. Au théorème de Laguerre, cité plus haut, correspond le suivant : Le centre de gravité des points de rencontre d'une droite avec une courbe du  $n^{\text{ième}}$  ordre est le même que celui des points d'intersection de la droite avec les asymptotes de la courbe.

2. Les systèmes de tangentes menées d'un point à deux courbes de même classe ont même orientation si le point est foyer d'une des courbes

Les centres de gravité des deux systèmes de points de rencontre de deux courbes algébriques de même ordre par une asymptote d'une courbe

<sup>1</sup> Deux systèmes de  $n$  droites ont même orientation lorsque la somme des angles que font les  $n$  droites avec un axe fixe est la même pour les deux systèmes (à un multiple de  $\pi$  près).

du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières (Humbert).

3. L'orientation du système des  $mn$  tangentes communes à deux courbes algébriques ne varie pas quand on remplace l'une des deux par une courbe qui lui est homofocale (Laguerre).

du faisceau ponctuel déterminé par les deux premières, coïncident.

Le centre de gravité des points de rencontre de deux courbes algébriques ne varie pas quand on remplace l'une des deux par une autre qui a les mêmes asymptotes.

6. — M. le Prof. Dr O. SPIESS (Bâle). — *Un théorème relatif aux fonctions rationnelles.* — LIE a émis la supposition qu'on doit pouvoir obtenir toute fonction analytique  $f(x)$  par itération d'une substitution infinitésimale  $x + g(x)dt$ ; que  $f(x)$  est par conséquent un élément d'un groupe continu de transformations. On n'a pas réussi jusqu'ici à démontrer ce théorème, même pour la classe très spéciale des fonctions algébriques. *Je démontrerai ici que la supposition de Lie est exacte au moins pour les fonctions rationnelles.*

Le problème peut se réduire à déterminer, pour chaque  $f(x)$  donné, une fonction  $\Phi$  qui satisfasse à l'équation

$$\Phi(f(x)) = \rho \cdot \Phi(x) . \quad (1)$$

La transformation infinitésimale originelle est alors déterminée par

$$f(x) = \frac{\Phi}{\Phi'} .$$

Or MM. KÆNIGS, GRÉVY et LÉAU ont démontré depuis longtemps qu'il existe des solutions de (1) dans le voisinage de certains points fixes de  $f(x)$ . Si, en particulier,  $f(x)$  est rationnelle, ces méthodes fournissent toujours une solution analytique excepté le seul cas où l'on a, pour tout point fixe  $\alpha_k$

$$\varepsilon_k = f'(\alpha_k) = e^{2\pi i h_k} \quad (h_k \text{ est irrationnelle}). \quad (2)$$

Et encore dans ce cas on connaît une solution si  $f(x)$  est linéaire :  $\Phi(x) = x$ .

La supposition de Lie sera donc démontrée pour une fonction rationnelle, si nous faisons voir que :

*Théorème :* Une fonction rationnelle dont tous les points fixes ont la propriété (2) est nécessairement linéaire.

*Démonstration :* Les points fixes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de  $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$  (nous

pouvons les supposer tous dans le fini) sont racines de l'équation :  $\psi \equiv xs - r = 0$ . Il en suit immédiatement :

$$\varepsilon_k = f'(\alpha_k) = 1 - \frac{\psi'(\alpha_k)}{s(\alpha_k)}.$$

Les nombres :

$$w_k = \frac{1}{1 - \varepsilon_k} = \frac{s(\alpha_k)}{\psi'(\alpha_k)}$$

sont au même titre que les  $\varepsilon_k \neq 0, 1, \infty$  (en vertu de (2)) ; par conséquent on aura d'après Lagrange :

$$\frac{s}{\psi} = \sum_1^n \frac{w_k}{x - \alpha_k} ;$$

et de là :

$$\sum_1^n w_k = \left[ \frac{xs}{\psi} \right]_{x=\infty} = 1 ; \quad \text{ou bien (3)} \quad \frac{w_1 + \dots + w_n}{n} = \frac{1}{n}.$$

Or, en vertu de (2), les points  $\varepsilon_k$  sont sur le cercle unité de centre O ; et par conséquent les points  $w_k$  sur la perpendiculaire à l'axe réel par  $x = \frac{1}{2}$ . Mais comme, en vertu de (3), le centre de gravité des  $w_k$  est  $x = \frac{1}{n}$ , il faut que  $n = 2$ , c'est-à-dire que  $f(x)$  soit linéaire. C. q. f. d.

7. — M. le Prof. Dr A. HURWITZ (Zurich). — *Généralisation du théorème de Pohlke*. (Extrait d'une lettre à M. Kollros.) — *Etant donnés deux tétraèdres, on peut toujours, en remplaçant l'un d'eux par un tétraèdre semblable, les amener dans une position telle que les droites joignant les sommets correspondants soient parallèles entre elles.*

En effet, si ABCD et A'B'C'D' sont les tétraèdres donnés, l'affinité  $\left( \begin{smallmatrix} ABCD \\ A'B'C'D' \end{smallmatrix} \right)$  transforme la sphère K circonscrite à ABCD en un ellipsoïde K' circonscrit au tétraèdre A'B'C'D'. Déterminons une section circulaire  $c'$  de l'ellipsoïde K' ; à ce cercle  $c'$  correspond, par l'affinité considérée, un cercle  $c$  sur la sphère K. Dilatons le tétraèdre ABCD, avec la sphère K et le cercle  $c$ , à une échelle choisie pour que le cercle  $c$  devienne un cercle  $c_1$  égal au cercle  $c'$ . Le tétraèdre dilaté  $A_1B_1C_1D_1$ , semblable au tétraèdre ABCD, peut dès lors être mis dans une position telle que le cercle  $c_1$

coïncide point par point avec le cercle  $c'$  ; ainsi les deux espaces en affinité deviennent perspectifs et les droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  sont parallèles.

Le problème admet deux solutions essentiellement différentes, correspondant chacune à l'un des deux systèmes de sections circulaires de l'ellipsoïde  $K'$ .

Si  $ABCD$  sont quatre points d'un plan et si  $A'B'C'D'$  est formé de trois arêtes d'un cube passant par un même sommet, on trouve, comme cas particulier, le théorème de Pohlke.

8. — M. le Prof. Dr C. CARATHÉODORY (Göttingue). — *Sur le traitement géométrique des extrémis des intégrales doubles.* — A côté des problèmes aux frontières auxquels le calcul des variations doit son existence et à côté du calcul des variations de Lagrange, dont l'importance grandit toujours plus dans tous les domaines, la théorie de Hamilton-Jacobi, issue il y a bientôt cent ans de l'optique et de la mécanique, joue un rôle tout aussi important.

Un essai d'extension de cette théorie aux intégrales doubles a été fait il y a quelques années<sup>1</sup>. Je veux, ici, esquisser les moyens très simples par lesquels on peut obtenir l'essentiel des résultats de Jacobi et Hamilton, lorsqu'aucune condition aux frontières n'est prescrite d'avance pour la solution cherchée et qu'on évite ainsi les difficultés particulières aux problèmes aux frontières.

Soit

$$J = \iint f(x, y, z; z_x, z_y) dx dy \quad (1)$$

l'intégrale double à étudier. Considérons une famille à deux paramètres

$$S(x, y, z) = \lambda, \quad T(x, y, z) = \mu \quad (2)$$

formée de courbes quelconques, traversant l'espace et envisageons-la comme une gerbe de tubes infiniment minces. Sur une surface quelconque  $z = z(x, y)$  chacun de ces tubes découpe un élément de surface pour lequel nous pouvons calculer comme suit la valeur de l'intégrale (1).

Posons

$$\bar{S}(x, y) = S(x, y, z(x, y)), \quad \bar{T}(x, y) = T(x, y, z(x, y)) \quad (3)$$

<sup>1</sup> G. PRANGE, *Die Hamilton-Jacobische Theorie für Doppelintegrale*, Inaug.-Diss., Göttingen, 1915.

et formons le déterminant fonctionnel

$$\Delta(x, y, z; z_x, z_y) = \frac{\partial(\bar{S}, \bar{T})}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} S_x + S_z \cdot z_x & S_y + S_z \cdot z_y \\ T_x + T_z \cdot z_x & T_y + T_z \cdot z_y \end{vmatrix}.$$

Il résulte alors de (1), (2), (3)

$$J = \int \int \frac{f}{\Delta} d\lambda d\mu$$

et la valeur cherchée de  $J$  pour l'élément de surface découpé est

$$\frac{f}{\Delta} d\lambda d\mu. \quad (4)$$

Cette valeur, qui dépend de  $z_x$  et  $z_y$ , c'est-à-dire de la position du plan tangent à la surface donnée  $z = z(x, y)$ , est la plus petite possible, lorsque les relations

$$\Delta \cdot f_{z_x} - f \cdot \Delta_{z_x} = 0, \quad \Delta \cdot f_{z_y} - f \cdot \Delta_{z_y} = 0 \quad (5)$$

sont vérifiées et que de plus le minimum de  $f/\Delta$  comme fonction de  $z_x, z_y$  est effectivement assuré par les valeurs tirées de (5) (conditions de Legendre ou de Weierstrass).

Nous appelons *section* du tube au point d'intersection du tube avec la surface  $z = z(x, y)$  le minimum de l'expression (4).

Nous exigeons maintenant de la famille de courbes (2), qu'elle ne contienne que des tubes de section *constante*. Cette condition nous donne la relation

$$\frac{f}{\Delta} = \psi(\lambda, \mu)$$

dans laquelle  $\psi(\lambda, \mu)$  est d'abord une fonction arbitraire. Si nous remarquons cependant que l'on peut toujours, par une transformation convenable des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  prendre  $\psi(\lambda, \mu) \equiv 1$ , nous obtiendrons finalement le système d'équations

$$f = \Delta, \quad f_{z_x} = \Delta_{z_x}, \quad f_{z_y} = \Delta_{z_y}, \quad (6)$$

duquel tout le calcul des variations des intégrales doubles se déduit sans effort.

9. — M. le Prof. D. HILBERT (Göttingue). — *Le raisonnement axiomatique*. — En groupant les faits d'un certain domaine scientifique, nous remarquons qu'ils sont susceptibles d'être ordonnés. Cet ordre se fait à l'aide d'un partage des notions, tel qu'au fait simple du domaine, correspond une notion de ce partage, et à



chaque ensemble de faits correspond une relation logique entre les notions. Le partage des notions s'appelle la théorie axiomatique du domaine scientifique envisagé. Ce partage est basé en outre sur un nombre restreint de principes fondamentaux caractéristiques du domaine qui suffisent entièrement à édifier les notions d'après les règles de la logique. Au premier coup d'œil, ces principes fondamentaux doivent être regardés comme les axiomes du domaine scientifique en question. Tout effort d'explication des axiomes conduit en général à un nouveau système d'axiomes, c'est-à-dire à une couche plus profonde d'axiomes. Ce procédé revient donc à reculer plus profondément les bases du domaine scientifique.

La théorie d'un domaine scientifique, c'est-à-dire le partage des notions par lesquelles il est représenté, a pour but de l'orienter et de l'ordonner. Pour arriver à ce but notre partage doit remplir deux conditions : premièrement, il doit donner un aperçu sur la dépendance des éléments, secondement, il doit assurer la non-contradiction des axiomes de la théorie. Ce second point est essentiel, car toute contradiction mettrait en doute la théorie entière. La démonstration de cette non-contradiction réussit en général pour les théories de la géométrie et de la physique en réduisant le problème à la non-contradiction des axiomes de l'arithmétique.

Pour l'arithmétique, la réduction à un autre domaine scientifique plus spécial n'est plus possible, parce que, en dehors de la logique, il n'existe plus aucune autre discipline à laquelle l'esprit humain doit se soumettre. Il semble donc nécessaire de pousser la recherche des axiomes de la logique dans ses dernières limites. Ce chemin a été préparé depuis longtemps ; les recherches du logicien Russell ont été particulièrement couronnées de succès.

Cette analyse des axiomes de la logique est rattachée à une série de questions spécialement mathématiques. Elle constitue dans tous les cas le problème le plus important et le plus difficile de la théorie de la connaissance.

10. — M. le Prof. A. SPEISER (Zurich). — *Equations du cinquième degré*. — On sait que le groupe alternant de cinq variables est isomorphe aux 60 rotations de l'icosaèdre. Elle admet par conséquent une représentation par substitutions linéaires ternaires :

$$S = (s_{ik}) \quad \left. \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} 1, 2, 3 \quad S = E, A, B \dots$$

ainsi que par substitutions linéaires fractionnaires

$$x' = \frac{s_1 x + s_2}{s_3 x + s_4}.$$



Si  $\omega$  est un nombre générateur d'un corps avec ce groupe, et si  $\omega = \omega_\varepsilon, \omega_A, \dots, \omega_S$  sont les nombres conjugués, les trois nombres

$$A_1 = \sum_s s_{11} \omega_s, \quad A_2 = \sum_s s_{12} \omega_s, \quad A_3 = \sum_s s_{13} \omega_s$$

subissent des substitutions ternaires par le passage aux conjugués et

$$\alpha = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3}}{2A_1}$$

subit par là les substitutions linéaires fractionnaires.

Par là, le problème de l'équation du 5<sup>e</sup> degré est ramené, de la manière la plus générale, à un problème à un paramètre.

11. — M. le Dr S. BAYS (Fribourg). — *Sur les systèmes de triples de 13 éléments.* — La preuve que pour 13 éléments le système cyclique de Netto, et le système donné par Kirkmann, Reiss, de Vries, sont les deux seuls systèmes de triples de Steiner différents possibles, peut être faite, sans l'aide d'aucune notion particulière et d'une manière assez simple, en construisant directement les systèmes de triples de 13 éléments qui ne contiennent pas un triple fixé  $abc$ .

Un système de triples de Steiner qui ne contient pas le triple  $abc$  contient les trois triples :

$$bc\alpha \quad ca\beta \quad ab\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq a, b, c \text{ et entre eux}),$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  peuvent être tous les arrangements de dix éléments trois à trois. Pour un arrangement  $\alpha, \beta, \gamma$  fixé, il n'y a que deux possibilités qui donnent, pour la construction du système, les seules dispositions suivantes qui s'écrivent aisément :

I<sup>er</sup> cas. Le triple  $\alpha\beta\gamma$  est contenu dans le système.

$$\begin{array}{cccccccc} a\alpha\alpha' & a.. & a\beta'. & a\gamma'. & \alpha.. & \alpha\beta'. & \alpha\gamma'. & \alpha'\beta'\gamma' \\ b\beta\beta' & b\alpha'm & b.. & b\gamma'. & \beta\alpha'p & \beta.. & \beta\gamma'. & \\ c\gamma\gamma' & c\alpha'n & c\beta'. & c.. & \gamma\alpha'q & \gamma\beta'. & \gamma.. & \end{array} \quad (40)$$

II<sup>e</sup> cas. Le triple  $\alpha\beta\gamma$  n'est pas contenu dans le système.

		$\beta\gamma\alpha'$	$\gamma\alpha\beta'$	$\alpha\beta\gamma'$			
		$a\alpha m$	$a\alpha'n$	$a\beta'p$	$a\gamma'q$	$\alpha\alpha'$	$\alpha..$
	1 <sup>o</sup>	$b\beta.$	$b\alpha'.$	$b\beta'.$	$b\gamma'.$	$\beta\beta'.$	$\beta..$
		$c\gamma.$	$c\alpha'.$	$c\beta'.$	$c\gamma'.$	$\gamma\gamma'.$	$\gamma..$
a)		$a\alpha\alpha'$	$a..$	$a\beta'.$	$a\gamma'.$	$\alpha..$	$\alpha..$
	2 <sup>o</sup>	$b\beta m$	$b\alpha'n$	$b\beta'p$	$b\gamma'q$	$\beta\beta'.$	$\beta..$
		$c\gamma.$	$c\alpha'.$	$c\beta'.$	$c\gamma'.$	$\gamma\gamma'.$	$\gamma..$

(8)

(8)

b) $\alpha'\beta'\gamma'$ n'est pas contenu dans le système.		$a\alpha\alpha'$	$a \dots$	$a\beta'\gamma'$	$a \dots$	$\alpha \dots$	$\alpha \dots$	$\alpha'\beta'm$
	1°	$b\beta.$	$b\alpha'p$	$b\beta'.$	$b\gamma'.$	$\beta\beta'.$	$\beta \dots$	$\alpha'\gamma'n$
		$c\gamma.$	$c\alpha'q$	$c\beta'.$	$c\gamma'.$	$\gamma\gamma'.$	$\gamma \dots$	(12)
		$a\alpha m$	$a\alpha'n$	$a\beta'p$	$a\gamma'q$	$\alpha\alpha'.$	$\alpha \dots$	$\beta'\gamma'.$
	2°	$b\beta.$	$b \dots$	$b\beta'\alpha'$	$b\gamma'.$	$\beta\beta'.$	$\beta \dots$	$\alpha' \dots$
		$c\gamma.$	$c \dots$	$c\beta'.$	$c\gamma'\alpha'$	$\gamma\gamma'.$	$\gamma \dots$	(24) pour $a\alpha'n$

(20) pour  $b\alpha'n$   
ou  $c\alpha'n$

Dans chacune de ces dispositions, les éléments  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , différents entre eux et des éléments  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , peuvent être tous les arrangements des sept éléments restants trois à trois; pour chaque arrangement  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ;  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  peuvent être toutes les permutations des quatre derniers éléments. Pour un arrangement  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  et une permutation  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  fixés, chacune des dispositions se complète par les éléments  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  (et cela sans y mettre beaucoup de temps) du nombre de manières que j'ai indiqué à droite, c'est-à-dire donne ce nombre de systèmes. En tenant compte des dispositions où les deux éléments  $\beta'$  et  $\gamma'$  ont à prendre le même rôle que  $\alpha'$ , nous obtenons donc :

$$A_{10}^3 \cdot A_7^3 \cdot P_4 \cdot (40 + 8 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + 3 \cdot (24 + 2 \cdot 20)) = 10! \cdot 300$$

systèmes de triples, ne contenant pas le triple  $abc$ , et par suite  $\frac{10! \cdot 300 \cdot 11}{10} = 10! \cdot 330$  systèmes de triples de 13 éléments, qui diffèrent entre eux au moins par un de leurs triples. Or, les ordres des groupes qui transforment en eux-mêmes le système cyclique de Netto et celui de Kirkmann sont 39 et 6;  $\frac{13!}{39} + \frac{13!}{6} = 10! \cdot 330$ . Par conséquent, le système cyclique de Netto et le système de Kirkmann sont les deux seuls systèmes de triples de Steiner différents pour 13 éléments.

12. — M. le Prof. L.-G. DU PASQUIER (Neuchâtel). — *Sur un point de la théorie des nombres hypercomplexes*. — Dans un système de nombres hypercomplexes à  $n$  unités relatives, constitué pour une infinité d'éléments tels que

$$x \equiv x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad \text{où les } x_1, x_2, \dots, x_n$$

sont des nombres réels quelconques dits « coordonnées du nombre hypercomplexe  $x$  », et les  $e_0, e_1, \dots, e_n$  des symboles dits unités

*relatives*, supposons définies l'égalité et deux opérations de calcul : l'addition et la multiplication. Il en résulte l'existence de deux opérations inverses qu'on appellera soustraction et division. Envisageons le corps de nombres  $\{R\}$  formé par l'ensemble des nombres hypercomplexes à coordonnées  $x_\lambda$  toutes rationnelles. Pour faire l'arithmomie de  $\{R\}$ , commençons par définir le nombre hypercomplexe « entier ». Selon la définition lipschitzienne, un nombre hypercomplexe rationnel  $x$  est *nombre entier*, quand toutes ses  $n$  coordonnées  $x_\lambda$  sont des nombres entiers ordinaires, tandis que  $x$  est réputé « non entier », dès que l'une de ses coordonnées  $x_\lambda$  est un nombre fractionnaire. On sait depuis GAUSS que cette définition, appliquée aux nombres complexes ordinaires  $x_0 + x_1 i$ , où  $i^2 = -1$ , donne une arithmomie parfaitement régulière, analogue en tout point à l'arithmétique classique. L'exemple le plus simple montrant combien cette définition lipschitzienne si simple est cependant peu appropriée *en général* comme base d'une arithmétique généralisée, est fourni par les « nombres complexes de seconde espèce »  $x \equiv x_0 + x_1 j$ , où  $j$  est un symbole défini par l'égalité  $j^2 = 1$ .

En adoptant la définition lipschitzienne, on voit que dans ce système particulier, un produit peut être divisible par un nombre entier sans qu'aucun des facteurs ne le soit; exemple :  $(3 + j)(5 - 3j) = 12 - 4j$  qui est divisible par 2. On peut faire tomber cette irrégularité, et d'autres encore, en remplaçant la définition lipschitzienne par la définition hurwitzienne d'après laquelle un nombre hypercomplexe  $x$  est réputé « entier » s'il est contenu dans le domaine holoïde maximal  $[M]$  du corps de nombres en question, « non entier » s'il ne fait pas partie de ce domaine holoïde maximal  $[M]$ . En vertu de cette définition nouvelle, un complexe rationnel  $x$  peut fort bien être entier quoiqu'ayant des coordonnées  $x_\lambda$  fractionnaires. Dans le cas particulier cité, on appellera *entier* tout nombre complexe de seconde espèce représentable par la formule  $a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}j$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres entiers ordinaires d'ailleurs quelconques. Ainsi,  $\frac{3}{2} + \frac{j}{2}$ ,  $\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j$  sont maintenant des complexes « entiers » et il n'est dès lors plus surprenant que  $(3 + j)(5 - 3j)$  soit divisible par 4.

La définition hurwitzienne postule dans le corps de nombres envisagé *l'existence d'un domaine holoïde maximal*. On appelle ainsi tout ensemble  $[M]$  contenant une infinité de nombres, parmi lesquels le nombre 1 et le nombre 0, jouissant des propriétés suivantes : 1) la somme, la différence et le produit de deux nombres quelconques de l'ensemble appartient toujours au même ensemble; 2) il possède une base finie; 3) il n'existe pas dans le corps de

nombres en question un autre domaine holoïde contenant tous les éléments de  $[M]$  plus encore d'autres non contenus dans  $[M]$ .

Dans le cas des nombres complexes de GAUSS, l'ensemble de tous les  $n_1 + n_2 \cdot i$ , lorsque  $n_1$  et  $n_2$  parcourent, indépendamment l'un de l'autre, la série des nombres entiers de  $-\infty$  à  $+\infty$ , constitue un domaine holoïde maximal dans  $\{R\}$ , en sorte que définition lipschitzienne et définition hurwitzienne se confondent. Tel n'est pas le cas des nombres complexes de seconde espèce : l'ensemble  $[H]$  de tous les  $n_1 + n_2 j$ , c'est-à-dire des complexes à coordonnées entières, constitue bien un domaine holoïde, mais qui n'est pas maximal dans  $\{R\}$ , puisque l'ensemble  $[M]$  de tous les  $n_1 + \frac{n_2}{2} + \frac{n_2}{2}j$  contient les éléments de  $[H]$  et, en plus, d'autres ne faisant pas partie de  $[H]$ .

Il existe des systèmes de nombres hypercomplexes où le corps  $\{R\}$  des complexes rationnels ne possède pas de domaine holoïde maximal. Dans ce cas, il n'est pas possible de définir le nombre hypercomplexe « entier » de manière à obtenir une arithmomie régulière. L'exemple le plus simple d'un tel système est fourni par les « nombres complexes de 3<sup>e</sup> espèce »  $y \equiv y_0 + y_1 i'$  où les coordonnées  $y_0, y_1$  sont de nouveau des nombres réels et  $i'$  un symbole défini par  $i'^2 = 0$ , le calcul sur ces nombres se faisant d'après les règles ordinaires de l'algèbre.

Pour caractériser les systèmes de nombres hypercomplexes sans domaine holoïde maximal, envisageons la suite  $x, x^2, x^3 \dots, x^n, x^{n+1}, \dots$  où  $x$  représente un nombre hypercomplexe à  $n$  unités relatives. Si l'une de ses puissances est identiquement nulle,  $x^r = 0$ , le nombre  $x$  est dit « nilpotent » ou « pseudonul », ou encore « racine r<sup>ième</sup> de zéro ». Ainsi, dans le système des nombres complexes de 3<sup>e</sup> espèce,  $i'$  est une racine carrée de zéro, puisque, par définition,  $i'^2 = 0$ .

*Une condition nécessaire pour que le corps  $\{R\}$  des nombres hypercomplexes rationnels soit dépourvu de domaine holoïde maximal est que le système en question contienne des racines de zéro.* Si le nombre des unités relatives dépasse 3, cette condition nécessaire n'est pas toujours suffisante. Mais quand un système de nombres contenant des racines de zéro n'est pas dépourvu complètement de domaine holoïde maximal, il possède une infinité de domaines holoïdes maximaux différents entre eux. La définition du complexe « entier » est alors plurivoque.

13. — M. le Prof. L.-G. DU PASQUIER (Neuchâtel). — *Une nouvelle formule d'interpolation dans la théorie mathématique de la population.* — Pour étudier les variations  $\Delta P$  que subit un groupe de population  $P(t)$  avec le temps  $t$ , on suppose que l'effectif  $P(t)$

est une fonction continue du temps et l'on définit *l'intensité de variation à l'instant t* par

$$\sigma(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta P}{P \cdot \Delta t} \right) = \frac{dP}{P \cdot dt} = \frac{P'}{P} .$$

On définit de même des intensités spéciales, notamment *l'intensité de natalité*  $\nu(t)$ ; *l'intensité de mortalité*  $\mu(t)$ ; *l'intensité d'immigration*  $\iota(t)$ ; *l'intensité d'émigration*  $\varepsilon(t)$ . Pour les facteurs qui tendent à diminuer l'effectif, on arrive à la même notion en partant de la théorie des probabilités mathématiques. On définit par exemple *le taux instantané de mortalité* par

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{n^q t}{n} \right) ,$$

en désignant par  $n^q t$  la probabilité pour une personne d'âge  $t$  de décéder au cours des  $n$  premières années, et l'on démontre que ce taux est égal à l'intensité de mortalité  $\mu(t)$ . En vertu d'une propriété fondamentale des « fonctions d'intensité » ou « taux instantanés », on peut écrire

$$\sigma(t) = \nu(t) - \mu(t) + \iota(t) - \varepsilon(t) ,$$

la natalité, la mortalité, l'immigration et l'émigration étant les quatre facteurs dont la variation de l'effectif  $P(t)$  dépend directement.

En faisant des hypothèses appropriées sur le taux instantané de variation, on retrouve les théories formelles de la population émises jusqu'ici. Ainsi,  $\sigma(t) = 0$  donne la théorie de la population stationnaire (E. HALLEY);  $\sigma(t) = \text{const.}$  conduit à la théorie *eulérienne* de la population variant en progression géométrique;  $\sigma(t)$  inversement proportionnel à l'effectif,  $\sigma(t) = \frac{c}{P}$ , donne la théorie de la population variant en progression arithmétique (de MOIVRE); l'hypothèse

$$\sigma(t) = c(m - P) ,$$

où  $c$  et  $m$  désignent des constantes positives, donne la théorie de F.-P. VERHULST qui suppose que la population, partant de l'effectif initial  $P_0$ , augmente constamment, mais de plus en plus lentement et finit par atteindre un état stationnaire caractérisé par l'effectif  $m$  (abstraction faite des écarts accidentels); formule:

$$P(t) = P_0 \cdot \frac{m \cdot e^{mct}}{P_0 \cdot e^{mct} + m - P_0} .$$

On peut développer une théorie nouvelle en supposant qu'avec le temps surgissent des facteurs qui influencent l'intensité de variation. Une formule relativement simple se déduit entre autres de l'hypothèse

$$\sigma(t) = \frac{2c}{P} (b - t) (P - m)^2$$

où  $c$ ,  $b$ ,  $m$  désignent des constantes ; elle conduit par intégration à

$$P(t) = m + \frac{P_0 - m}{c(P_0 - m)(t^2 - 2bt) + 1}.$$

Parti de l'effectif initial  $P_0$ , la population passe (après un temps  $b$ ) par un maximum égal à  $m + \frac{1}{1 - cb^2}$ , puis tend vers un état stationnaire caractérisé par l'effectif constant  $m$ .

En terminant, l'auteur indique les bases d'une théorie future de la population, théorie formelle mieux adaptée à la réalité que celles émises jusqu'ici.

14. — M. le Dr H. BERLINER (Berne). — *Sur une loi de la pluriarité infinie permettant d'interpréter chaque théorème de la géométrie projective d'une infinité de manières.* — La recherche des coordonnées homogènes projectives d'un point du plan est basée sur les propriétés suivantes : chaque point détermine trois transversales par les sommets du triangle fondamental  $A_1 A_2 A_3$  du système des coordonnées. Chaque point et le point fondamental déterminent d'une manière univoque trois rapports doubles, dont le produit est constant pour tous les points. Inversement trois rapports déterminent un point du plan. Au lieu des points on peut admettre les courbes symétriques triangulaires  $D_m$  avec l'indice  $m$  qui est un entier quelconque comme élément de la recherche des coordonnées homogènes et projectives. La représentation paramétrique de ces courbes est de la forme

$$\rho x_\lambda = c_\lambda (a_\lambda t + b_\lambda)^m \quad (\lambda = 1, 2, 3)$$

(on a choisi les  $c_\lambda$  pour pouvoir considérer aussi les points comme courbes). Les points communs d'une courbe  $D_m$  et des côtés de  $A_1 A_2 A_3$  sont trois points de tangence ou trois sommets (suivant que  $m$  est positif ou négatif). Par chacun de ces derniers il n'existe qu'une seule tangente. Les  $D_m$  déterminent ainsi trois transversales des sommets  $A_\lambda D_m$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ), c'est-à-dire passant par les points de tangence de  $D_m$  avec les côtés opposés ou les tangentes de  $D_m$  en  $A_1, A_2, A_3$ . Avec une telle courbe  $D_m$  et l'élément fon-

damental (ce dernier peut être une courbe triangulaire symétrique fixe quelconque d'un indice  $k$  entier). On détermine trois rapports anharmoniques dont le produit a la valeur  $(-1)^{k-m}$ . Inversement trois rapports anharmoniques déterminent d'une manière unique une courbe  $D_m$ . On peut admettre les  $D_m$  comme éléments fondamentaux et les coordonnées  $D_m$  homogènes sont  $x_1^{(m)} x_2^{(m)} x_3^{(m)}$ . Elles sont données par les équations

$$(-1)^{m-k} A_\lambda (A_{\lambda+1} A_{\lambda+2} D_k D_m) = \frac{x_{\lambda+1}^{(m)}}{x_{\lambda+2}^{(m)}} ; \quad (\text{I})$$

$$(-1)^{m-k} A_\lambda (A_{\lambda+1} A_{\lambda+2} D_m D_k) = \frac{x_{\lambda+1}^{(m)}}{x_{\lambda+2}^{(m)}} \quad (\text{II})$$

$$\text{ou} \quad (-1)^{m-k} [A_\lambda (A_{\lambda+1} A_{\lambda+2} D_k D_m)]^{(-1)^m} = \frac{x_{\lambda+1}^{(m)}}{x_{\lambda+2}^{(m)}} \quad (\text{III})$$

$$(\lambda = 1, 2, 3) .$$

Les coordonnées homogènes projectives linéaires et ponctuelles ne sont que les coordonnées  $D_0$  et  $D_1$  d'après la disposition (III).

Lorsqu'une courbe est donnée en forme paramétrique à l'aide des coordonnées  $D_m$  :  $\varphi x_\lambda^{(m)} = f_\lambda(t)$ , donc comme lieu des  $D_m$ , l'enveloppe de toutes les courbes  $D_m$  est représentée paramétriquement par les équations suivantes :

$$\varphi x_\lambda = [f_\lambda(t)]^{m+1} [f_{\lambda+1}(t) f'_{\lambda+2}(t) - f_{\lambda+2}(t) f'_{\lambda+1}(t)]^m, \quad (\text{I})$$

$$\varphi x_\lambda = [f_\lambda(t)]^{m-1} [f_{\lambda+1}(t) f'_{\lambda+2}(t) - f_{\lambda+2}(t) f'_{\lambda+1}(t)]^m \quad (\text{II})$$

$$\text{ou :} \quad \varphi x_\lambda = [f_\lambda(t)]^{m+(-1)^m} [f_{\lambda+1}(t) f'_{\lambda+2}(t) - f_{\lambda+2}(t) f'_{\lambda+1}(t)]^m \quad (\text{III})$$

$$(\lambda = 1, 2, 3) .$$

si l'on a utilisé la définition I, II ou III pour les coordonnées  $D_m$ . Particulièrement lorsque les  $D_m$  sont les éléments fondamentaux, l'enveloppe précédente est une courbe  $D_m$  resp.  $D_{m-1}$  ou  $D_{m+(-1)^m}$ . Pour la définition III seulement, les éléments fondamentaux et les formations fondamentales sont réciproques. En prenant les bases précédentes comme nouveaux éléments fondamentaux, les bases des nouvelles formations fondamentales seront les anciens éléments fondamentaux. La condition d'incidence d'une  $D_m$  et d'une  $D_{m+1}$  est pour les cas I et II :

$$\frac{x_1^{(m)}}{x_1^{(m+1)}} + \frac{x_2^{(m)}}{x_2^{(m+1)}} + \frac{x_3^{(m)}}{x_3^{(m+1)}} = 0 ,$$



pour le cas III :

$$x_1^{(m)} x_1^{(m+1)} + x_2^{(m)} x_2^{(m+1)} + x_3^{(m)} x_3^{(m+1)} = 0 ,$$

où les  $x^{(m)}$  et  $x^{(m+1)}$  sont les coordonnées  $D_m$  et  $D_{m+1}$ . On suppose encore que les coordonnées  $D_m$  et  $D_{m+1}$  admettent la même courbe  $D_k$  comme élément fondamental.

Nous pouvons donc interpréter chaque théorème de la géométrie projective d'une infinité de manières. On remplace les points par les  $D_m$  ( $m$  est un entier quelconque) comme éléments fondamentaux. Quand les  $D_m$  sont déjà choisis le théorème a encore deux interprétations. En prenant une fois les  $D_m$  d'après I, une autre fois un  $D_{m-1}$  d'après II comme bases relatives aux formations élémentaires. Ce principe est *le principe ou la loi de la pluralité infinie*. La dualité en est un cas spécial pour lequel on ne regarde que les points et les droites, donc les  $D_0$  et  $D_1$  comme éléments fondamentaux. Chaque théorème projectif se démontre à l'aide des coordonnées homogènes projectives; dans cette démonstration on peut remplacer les coordonnées points par les coordonnées  $D_m$  quelconques.

Dans l'espace, cette même loi de la pluralité infinie subsiste. On peut admettre comme éléments des coordonnées projectives fondamentales de l'espace les surfaces symétriques tétraédrales d'un indice entier quelconque. La dualité dans l'espace est un cas spécial de la loi générale. Chaque théorème projectif de la géométrie réglée s'interprète d'une infinité de manières. Les courbes symétriques tétraédrales d'un indice entier quelconque sont les courbes d'intersection de deux surfaces symétriques tétraédrales du même indice  $m$ .

Pour finir, nous remarquons encore que sous des conditions déterminées, on peut traiter aussi les courbes symétriques triangulaires et les surfaces symétriques tétraédrales d'un indice complexe comme éléments fondamentaux du plan ou de l'espace.

15. — M. le Dr K. MERZ (Coire). — *Transformation quadratique d'une collinéation; une métrique qui s'y rapporte*. — Par les formules

$$\xi^2 = x^2 : (r^2 - x^2 - y^2) ; \quad \eta^2 = y^2 : (r^2 - x^2 - y^2)$$

le plan indéfini des  $\xi, \eta$  est transformé dans l'intérieur du cercle  $x^2 + y^2 = r^2$ ; la droite à l'infini correspondant au périmètre de ce dernier. Aux droites parallèles à  $\xi$  correspondent des ellipses dont le grand axe est le diamètre du cercle, sur  $x$ . Pour  $\eta = 1$ , on trouve le demi petit axe sur  $y$   $r : \sqrt{2}$ . Si ce segment est choisi comme unité pour les  $\eta$ , et si l'on fait coïncider les axes des coordonnées  $\xi\eta$  avec  $xy$ , les points sur  $x^2 + y^2 = \frac{r^2}{2}$  se correspondent



à eux-mêmes. A un segment de droite AB à l'intérieur du cercle, qui, prolongé, couperait le cercle en U et V, correspond un arc A'B' d'une hyperbole dont les asymptotes sont OU et OV.

Si l'on opère, consécutivement à cette transformation, la nouvelle transformation, quadratique,  $\xi^2 = \xi'$ ;  $\eta^2 = \eta'$ ;  $x^2 = x'$ ;  $y^2 = y'$ ; on obtient la collinéation centrale, de centre O, d'axe  $x' + y' = \frac{r^2}{2}$ , avec la droite limite  $x' + y' = r^2$ . On peut déduire de cette collinéation des propriétés de la précédente transformation du plan  $\xi\eta$  dans le cercle  $r$ .

Pour obtenir une *métrique*<sup>1</sup> à l'intérieur du cercle  $r$ , il faut mesurer le segment A( $x_1 y_1$ ) B( $x_2 y_2$ ) par une fonction  $F(x, y)$  qui prenne une valeur infinie lorsque A ou B viennent en U ou V. Pour cela la mesure choisie sera l'arc d'hyperbole A'B'. Les coordonnées  $x$  et  $y$  d'un point P, dans  $r$ , seront alors mesurées par les arcs d'hyperboles appartenant à P',  $u$  et  $v$ , qui correspondent aux segments  $x$  et  $y$ . Ces coordonnées curvilignes sont représentées par des intégrales elliptiques :

$$u = \int \frac{\sqrt{(r^2 - y^2)^2 + x^2 y^2}}{\sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)^3}} dx, \quad v = \int \frac{\sqrt{(r^2 - x^2)^2 + x^2 y^2}}{\sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)^3}} dy.$$

Ces arcs  $u$  et  $v$  se coupent en P' sous un angle  $\varphi$ . Pour que l'élément linéaire donné par  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  soit mesuré par son correspondant  $du^2 + dv^2 - 2dudv \cos \varphi$ , on représentera l'angle droit, formé par  $dx$  et  $dy$ , par

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{r^2(r^2 - x^2 - y^2)}{xy(2r^2 - x^2 - y^2)}.$$

La fonction mesurante  $F(xy)$  est alors à déterminer à l'aide de  $u, v, \varphi$ .

Dans cette métrique, les lignes géodésiques ne sont pas des segments AB, mais des arcs d'ellipses, qui correspondent, dans la transformation à la corde de l'arc d'hyperbole A'B'. Dans le voisinage de O, ces arcs et les segments AB se confondent de plus en plus, et l'on obtient une *métrique euclidienne*.

16. — *Séance administrative.* — La Société prend connaissance et approuve le rapport du trésorier, M. le Prof. CRELIER. Elle procède ensuite au renouvellement de son Comité pour 1918 et 1919. M. Michel PLANCHEREL (Fribourg) est nommé président, M. L. CRELIER (Bienne-Berne), vice-président, et M. O. SPIESS (Bâle), secrétaire-trésorier.

La prochaine réunion annuelle aura lieu, sauf imprévu, à *Lugano*.

<sup>1</sup> Ceci est un exemple pour les considérations générales de géométrie non-euclidienne qu'on peut trouver dans K. MERZ, Zur Erkenntnistheorie von Raum und Zahl aus Historischem der Steinerschen Fläche (S. 104), *Jahresbericht der Naturf. Gesellschaft, Graubündens*, Chur, 1917.