Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1917)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur la définition géométrique de la « Fenêtre de Viviani ».

Dans les cours de géométrie, on présente généralement la courbe de Viviani comme intersection de deux surfaces de révolution : une sphère de rayon r, et un cylindre de rayon $\left(\frac{r}{2}\right)$ tangent intérieurement à la sphère; c'est la définition géométrique la plus simple.

Remarquons que la courbe peut être dessinée sur une infinité de surfaces de révolution du deuxième degré, issues d'une combinaison linéaire de la sphère et du cylindre primitifs.

Soit (s) la sphère, dont le centre est à l'origine :

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \; ; \qquad (s)$$

et soit (c) le cylindre tangent intérieurement, de rayon $\left(\frac{r}{2}\right)$, et d'axe parallèle à l'axe des z :

$$x^2 + y^2 - rx = 0 \; . \qquad (c)$$

Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe satisferont à toute équation résultant de la combinaison suivante :

$$(c) + (s) . [f(x , y , z)] = 0 \; ,$$

où $f(x , y , z)$ est une fonction quelconque, finie tout le long de la courbe.

Un cas particulièrement intéressant est celui où la fonction $f(x , y , z)$ se réduit à une constante k :

$$(c) + k(s) = 0 \; . \qquad (1)$$

On obtient l'équation :

$$x^2 + y^2 - rx + k(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) = 0 \; , \qquad (2)$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{\left[x-\frac{r}{2(1+k)}\right]^2}{\left[\frac{r(1+2k)}{2(1+k)}\right]^2}+\frac{y^2}{\left[\frac{r(1+2k)}{2(1+k)}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[\frac{r(1+2k)}{2(1+k)}\right]^2\cdot\frac{1+k}{k}}=1\,. \qquad (3)$$

Sauf dans les cas où le discriminant de cette équation est nul, cette quadrique (3) est visiblement une surface de révolution, dont le centre est sur l'axe des x, à une distance de l'origine égale à :

$$\xi=\frac{r}{2(1+k)}\,.$$

Donc : *Toutes les quadriques à discriminant non nul qui contiennent la courbe de Viviani sont des quadriques de révolution, issues de la combinaison* (1). Les demi-axes sont les valeurs :

$$A_1=\frac{r(1+2k)}{2(1+k)}\,;\qquad A_2=\frac{r(1+2k)}{2(1+k)}\cdot\sqrt{\frac{1+k}{k}}=\frac{r(1+2k)}{2\sqrt{k(1+k)}}\,.$$

On en tire :

$$A_1^2(k+1)=kA_2^2\,,\qquad k=\frac{A_1^2}{A_1^2-A_2^2}\,;$$

et portant cette valeur de k dans l'expression de A_1, on obtient :

$$r(A_1^2+A_2^2)=2A_1A_2^2\,; \qquad (4)$$

c'est là la condition que doivent vérifier les axes d'une quadrique de révolution, dont l'axe de rotation est celui des z, pour que cette quadrique contienne la courbe envisagée. On voit immédiatement, d'après (4), qu'il faut écarter les hyperboloïdes à deux nappes.

On remarquera d'ailleurs que les trois valeurs de k qui annulent le discriminant sont :

$$k=-1\,,\qquad k=-\frac{1}{2}\,,\qquad k=0\,;$$

elles correspondent respectivement à un cylindre parabolique, à un cône de révolution dont l'axe est la génératrice du cylindre (c) tangente à la sphère (s), et au cylindre (c) lui-même.

On établira aisément le tableau suivant :

k	Axe A_1 dans le plan xy	Axe A_2 de rotation	
$k = -\infty$	r	r	Sphère (équation s).
$-\infty < k < -1$	$r < A_1 < \infty$	$r < A_2 < \infty$	Ellipsoïde aplati ($A_2 < A_1$).
$k = -1$	∞	∞	Cylindre parabolique $z^2 + rx - r^2 = 0$.
$-1 < k < -\frac{1}{2}$	$\infty > A_1 > 0$	imaginaire	Hyperboloïde à 1 nappe.
$k = -\frac{1}{2}$	0	0	Cône de révolution.
$-\frac{1}{2} < k < 0$	$0 < A_1 < \frac{r}{2}$	imaginaire	Hyperboloïde à 1 nappe.
$k = 0$	$\frac{r}{2}$	∞	Cylindre (équation c).
$0 < k < \infty$	$\frac{r}{2} < A_1 < r$	$\infty > A_2 > r$	Ellipsoïde allongé ($A_2 > A_1$).
$k = +\infty$	r	r	Sphère s.

Et l'on voit que, dans cette famille de quadriques contenant la courbe en question, le cas de ($k = -1$) seul ne correspond pas à une surface de révolution.

G. TIERCY (Genève).

Sur l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$.

L'étude de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = +1 \tag{1}$$

a déjà passionné plus de trois cents auteurs, et l'on connaît les Tables de Legendre, Bickmore et Whitford ! [1]

La recherche pratique de la solution minima était faite jusqu'à présent sur les fractions continues, ce qui demande en général beaucoup de soins et de temps.

J'ai maintenant complètement établi une méthode nouvelle, donnant à l'aide de mes procédés mécaniques et même parfois à simple vue une valeur très petite pour une inconnue auxiliaire,

[1] Ce dernier volume a été annoncé dans l'*E. M.* en 1912 par M. A. Aubry.

qui, dans les cas les plus défavorables, est toujours inférieure à la racine carrée de l'inconnue classique.

J'utilise simplement les équations

$$z^2 - At^2 = \pm 4, \pm 2, -1 \tag{2}$$

en égalant, suivant les cas, A et t à des formes $a^2 + b^2$, $p^2 + 2q^2$, $2r^2 - s^2$, $m^2 - n^2$.

Ayant la solution minima d'une des équations (2), on sait facilement passer à (1).

J'obtiens ainsi dans chaque cas des équations doubles à solutions entières.

Avec mon inconnue, égale à l'*unité*, j'obtiens par exemple :

$$61^2 - 149.5^2 = -4$$

$$213^2 - 157.17^2 = -4$$

$$45^2 - 2029.1^2 = -4$$

$$1135^2 - 941.37^2 = -4$$

$$232^2 - 2153.5^2 = -1$$

Ainsi pour $941 = 29^2 + 10^2$, j'ai

$$31^2 - 941.1^2 = +2.10 ,$$

$$184^2 - 941.6^2 = -2.10 ,$$

d'où $6^2 + 1^2 = 37$, et la solution précédente.

Voici certaines de mes équations de conditions simultanées

1° $$z^2 - At^2 = -1 , \qquad A = m^2 + n^2 , \qquad t = \alpha^2 + \beta^2$$

$$(m\alpha - n\beta)^2 - A\beta^2 = \pm m ,$$

$$(m\beta + n\alpha)^2 - A\alpha^2 = \mp m ,$$

$$m \text{ impair}, \quad n \text{ pair}$$

2° $$z^2 - At^2 = +2 , \qquad A = a^2 - 2b^2 , \qquad |t| = \alpha^2 - 2\beta^2$$

$$(b\alpha - a\beta)^2 - p\beta^2 = \pm b ,$$

$$(2b\beta - a\alpha)^2 - p\alpha^2 = \pm 2b .$$

Ainsi pour $A = 151$, j'ai $\beta = 7$.

Le cas de -2 est semblable.

3° $$z^2 - At^2 = -4 ; \qquad A = a^2 + b^2 , \qquad t = z^2 + t^2$$

$$(bz - at)^2 - At^2 = \pm 2b ,$$

$$(bt + az)^2 - Az^2 = \mp 2b .$$

Pour $A = 1429$, j'obtiens $t = 1$.

En terminant ces brèves notes, je signale une erreur de Legendre.

Pour 397, j'ai, avec une inconnue égale à *deux*

$$40^2 - 397 . 2^2 = + 2 . 6 \ ,$$

d'où

$$259^2 - 397 . 13^2 = - 2 . 6 \ ,$$

ce qui donne

$$3447^2 - 397 . (13^2 + 2^2)^2 = - 4 \ ,$$

et pour l'équation (1)

$$y = 42\ 094\ 239\ 791\ 738\ 433\ 660 \ .$$

J'ai beaucoup de résultats inédits et j'espère pousser les tables actuelles jusqu'à 3000.

Aux Armées de France.
9 juin 1917.

A. GÉRARDIN.

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Bien que la guerre ait suspendu les travaux de la Commission internationale, plusieurs des sous-commissions nationales qui n'avaient pas encore achevé leurs rapports ont continué, dans la mesure du possible, l'élaboration des mémoires projetés. Vingt fascicules nouveaux ont été distribués depuis le 1er avril 1914 ; ils se répartissent comme suit :

Comité central 2, Allemagne 11, Australie 1, Belgique 1, Etats-Unis 4, Russie 1. On en trouvera la liste détaillée dans les *Notes et Documents* (voir plus loin).

Parmi ces rapports, les uns se rattachent directement au plan général des travaux élaborés par le Comité central, d'autres pré-