

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1917)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR UNE TRANSFORMATION PROJECTIVE CONDUISANT A QUELQUES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES  
**Autor:** Gonseth, F.  
**Kapitel:** II  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-17329>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

3. — Le plan non-euclidien à étudier se déduit du plan euclidien par une simple *polarité* suivant le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

ou par une *antipolarité* suivant le cercle de rayon unité. Le centre de ce cercle sera dit aussi *centre de la transformation*.

4. — La distance non-euclidienne de deux points  $P_1, P_2$  est évidemment égale à l'angle des rayons  $OP_1$  et  $OP_2$ .

La distance  $D$  d'une droite  $d$ , de coordonnées  $(u, v)$  à un point  $P(x, y)$  est donnée par la formule suivante :

$$D = \frac{ux + vy + 1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{ux + vy + 1}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \cdot \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Cette distance est donc égale au quotient de la distance euclidienne  $\delta$  de  $P$  à  $d$ , par le produit des distances euclidiennes  $r$  de  $O$  à  $P$ , et  $p$  de  $O$  à  $d$ .

$$D = \frac{\delta}{r \cdot p}.$$

L'angle  $\Phi$  de deux droites  $d_1, d_2$ , de coordonnées  $(u_1, u_2)$  et  $(v_1, v_2)$  (correspondant à la distance de deux points du plan euclidien) s'obtient comme suit :

Soit  $R$  le point d'intersection de  $d_1$  et  $d_2$ ; une perpendiculaire en  $O$  sur  $OR$  les coupe en  $M_1$  et  $M_2$ .

Or :

$$\overline{OR} = \frac{\sqrt{(v_1 - v_2)^2 + (u_1 - u_2)^2}}{u_1 v_2 - u_2 v_1},$$

$$\text{tg } \widehat{ORM_1} = \frac{u_1 v_2 - v_1 u_2}{u_1^2 + v_1^2 - u_1 u_2 - v_1 v_2}.$$

D'où il résulte :

$$\Phi = \frac{1}{OM_1} - \frac{1}{OM_2}.$$

## II

5. — Nous appliquons tout d'abord cette transformation au cas le plus simple possible; les propriétés les plus connues des coniques vont se trouver être les transformées de propriétés immédiates du cercle.

Un cercle,  $C$ , passe par les points cycliques; sa courbe correspondante sera donc une conique  $\gamma$  touchant les isotropes du point  $O$ ; une conique dont  $O$  est par conséquent un foyer.  $O$  ayant été

choisi arbitrairement dans le plan du cercle, sa *directrice* sera la correspondante du *centre* de  $C$ ; le *second foyer* de  $\gamma$  sera le transformé de l'*axe radical* de  $C$  et du cercle-point  $O$ .

6. — Nous écrivons maintenant, en face l'un de l'autre, quelques énoncés correspondants, dont l'identité est démontrée par ce qui précède :

$a)$  Les droites projetant deux points fixes d'un cercle depuis un point variable de ce dernier, forment un angle constant.

$b)$  Les tangentes d'un cercle sont également éloignées du centre.

$c)$  Les points d'un cercle sont également éloignés du centre.

$d)$   $O$  est un point arbitraire;  $M$  un point mobile sur un cercle  $c$ ; et  $P$  le pied de la perpendiculaire abaissée de  $P$  sur l'axe radical de  $c$  et du cercle point  $O$ ;

$$\frac{\overline{OM}^2}{\overline{MP}} = \text{constante}.$$

$a')$  Les droites projetant depuis le foyer d'une conique les points où deux tangentes fixes de celle-ci sont coupées par une tangente mobile, forment un angle constant.

$b')$  Le rapport des distances d'un point d'une conique à un foyer et à la directrice correspondante est un nombre constant.

$c')$   $D$  étant le point où une tangente à une conique coupe une directrice,  $O$  le foyer correspondant; et la perpendiculaire en  $O$  sur  $OD$  coupant la tangente en  $M_1$ , et la directrice en  $M_2$  :

$$\frac{1}{\overline{OM}_1} - \frac{1}{\overline{OM}_2}$$

est une constante.

$d')$  Le produit des distances des foyers d'une conique à une tangente variable est une constante.

7. — La transformation que nous étudions fait correspondre à la géométrie des *cercles*, celle des *coniques ayant un foyer commun*. Tous les énoncés de la première se transporteront dans la seconde, aussitôt qu'auront été donnés les équivalents de l'*angle* de deux cercles; et de la *puissance* d'un point par rapport à un cercle.

Deux coniques qui ont un foyer commun possèdent encore deux tangentes communes. Soient  $T_1$  et  $T_2$ ;  $T_1'$  et  $T_2'$  les points de con-

tact sur chacune d'elles : les angles  $T_1OT_2$  et  $T_1'OT_2'$  sont égaux et correspondent à l'angle de deux cercles.

Soit  $a$  une droite arbitraire, et  $P$  un point de cette droite ; ayant mené les tangentes de  $P$  à une conique  $\gamma$ , dont  $O$  est un foyer ; ayant enfin mené en  $O$  la perpendiculaire à  $OP$ , qui coupe  $a$  en  $M$ , et les tangentes en  $M_1$  et  $M_2$  ; l'expression

$$\pi = \left( \frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_1} \right) \left( \frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_2} \right)$$

est constante quel que soit  $P$  sur  $a$ , et correspond à la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Transformons par exemple le théorème suivant dû à M. FAURE<sup>1</sup> : *Les cercles harmoniquement circonscrits à une conique en coupent orthogonalement le cercle orthoptique.*

Soit  $O$  un point arbitraire, qui sera comme plus haut le centre de la transformation ; et  $\gamma$  une conique quelconque. Soit  $c$  la transformée de  $\gamma$  ; les droites qui la coupent en deux points  $R_1$  et  $R_2$  tels que l'angle  $\widehat{R_1OR_2}$  soit droit enveloppent une courbe qui est évidemment la correspondante du cercle orthoptique de  $\gamma$ . C'est une conique dont  $O$  est un foyer, et suivant laquelle  $O$  a la même polaire que suivant  $c$ . Convenons de la nommer la *conique orthoptique de  $c$ , par rapport à  $O$* . Convenons de plus de dire que deux coniques de même foyer  $O$  sont orthogonales lorsque l'angle  $T_1OT_2$ , dont il est question plus haut, est droit. L'énoncé de Faure devient alors le suivant :

*Toutes les coniques dont  $O$  est un foyer et qui sont harmoniquement inscrites à une conique  $c$ , sont orthogonales à la conique orthoptique de  $c$ , par rapport à  $O$ .*

8. — Un faisceau de *coniques homofocales* est transformé dans le faisceau *ponctuel* déterminé par une conique arbitraire et par le cercle-point  $O$ .

Dans ce faisceau se trouvent, en plus du cercle-point  $O$ , deux paires de droites ; l'une est réelle ; les deux droites qui la composent seront dites les *directrices* du point  $O$ .

Les propriétés suivantes sont la traduction de propriétés correspondantes des coniques homofocales.

*Une droite  $d$  est coupée par les courbes de ce faisceau en des couples de points qui forment une involution ; les points doubles de celle-ci sont les points de contact des deux courbes du faisceau qui touchent  $d$  ; cette involution est projetée depuis  $O$  par les rayons d'une involution symétrique.*

L'énoncé  $a')$  devient :

<sup>1</sup> FAURE, *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 234.

Ayant choisi deux points fixes sur une conique, et les ayant projetés depuis un point mobile, soient  $N_1$  et  $N_2$ , les points où les rayons projetants coupent l'une et l'autre directrices du point  $O$ ; l'angle  $N_1ON_2$  est constant,

et l'énoncé  $d'$  par exemple :

Le produit  $\frac{q}{d_1} \cdot \frac{q}{d_2}$  (où  $q$  est la distance d'un point arbitraire de la courbe au point  $O$ ;  $d_1$  et  $d_2$  les distances aux directrices de  $O$ ), est une constante.

Si  $O$  est un foyer, ses directrices coïncident; et l'on retrouve l'énoncé  $b'$ ).

9. — Plus généralement, transformons l'ensemble des courbes de  $n^{\text{ième}}$  classe ayant les mêmes foyers qu'une courbe donnée  $\Gamma_n$ . Les courbes transformées sont du  $n^{\text{ième}}$  ordre et forment un système linéaire ponctuel. Parmi elles se trouve une courbe comprenant  $n$  droites réelles. Ces  $n$  droites seront les  $n$  directrices réelles du point  $O$ , suivant  $C_n$ , la transformée de  $\Gamma_n$ .

Et les deux énoncés suivants de Laguerre :

Les  $n$  tangentes menées à  $\Gamma_n$  depuis un point quelconque ont même orientation que le groupe des  $n$  droites allant aux foyers réels de  $\Gamma_n$ ; et

Les  $mn$  tangentes communes à deux courbes  $\Gamma_m$  et  $\Gamma_n$  ont même orientation que le groupe des  $mn$  droites joignant tous les foyers réels de  $\Gamma_m$  à tous les foyers réels de  $\Gamma_n$

prennent la forme suivante :

Les  $n$  points d'intersection d'une droite arbitraire avec une courbe  $C_n$  d'une part, et les  $n$  directrices d'un point quelconque  $O$  d'autre part sont projetées depuis  $O$  par deux groupes de rayons ayant même orientation.

Les  $mn$  points d'intersection de deux courbes  $C_m$  et  $C_n$  sont projetées depuis un point arbitraire  $O$  suivant  $mn$  droites ayant même orientation que le groupe des  $mn$  droites projetant les  $mn$  intersections de toutes les directrices du point  $O$  suivant  $C_m$  avec toutes les directrices du même point suivant  $C_n$ .

On pourrait aisément multiplier les exemples. En règle générale toute propriété métrique se transforme en une nouvelle, d'essence plus générale, si le centre de la transformation ne prend pas quelque position spéciale.

### III

10. — On peut opérer une transformation semblable dans l'espace. L'espace transformé peut être considéré comme *non-euclidien*, avec la *quadrique absolue*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$