

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1917)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR UNE TRANSFORMATION PROJECTIVE CONDUISANT A QUELQUES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES  
**Autor:** Gonseth, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-17329>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

valeurs quelconques de  $p$  et  $a$ . Aussi n'avons-nous pas démontré par induction que ce qui a lieu pour quelques valeurs de  $p$  et  $a$  serait aussi le cas pour des valeurs plus considérables.

A mon avis le cas traité est exceptionnel, et ne permet pas ces preuves ordinaires. En vérité, il me semble suffire que nous soyons à même d'éprouver l'exactitude de la loi que nous venons d'énoncer pour autant de nombres premiers que nous voulons, et de savoir que, dans autant de cas, notre exposition sera juste.

Copenhague, le 1<sup>er</sup> juillet 1916.

---

## SUR UNE TRANSFORMATION PROJECTIVE CONDUISANT A QUELQUES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES

PAR

F. GONSETH (Zurich).

---

### I

1. — Dans un plan non-euclidien, nous allons supposer que la conique absolue soit réciproque de celle du plan euclidien, c'est-à-dire qu'elle se réduise à deux droites. Nous examinerons ensuite la métrique de ce plan avec un œil euclidien.

Aux notions *d'angle de deux droites*, de *distance d'un point à une droite*, et de *distance de deux points* vont correspondre les notions au sens non-euclidien de distance de deux points, de distance d'une droite à un point, et d'angle de deux droites.

2. — Supposons que la conique absolue de ce plan soit formée des deux droites isotropes de l'origine

$$x^2 + y^2 = 0 .$$

Pour passer des premières notions précitées aux secondes, il suffit de remplacer dans les formules usuelles les coordonnées  $(x, y)$  d'un point, par celles  $(u, v)$  d'une droite ; et l'équation des points cycliques

$$u^2 + v^2 = 0$$

par celle des droites isotropes de l'origine

$$x^2 + y^2 = 0 .$$

3. — Le plan non-euclidien à étudier se déduit du plan euclidien par une simple *polarité* suivant le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

ou par une *antipolarité* suivant le cercle de rayon unité. Le centre de ce cercle sera dit aussi *centre de la transformation*.

4. — La distance non-euclidienne de deux points  $P_1, P_2$  est évidemment égale à l'angle des rayons  $OP_1$  et  $OP_2$ .

La distance  $D$  d'une droite  $d$ , de coordonnées  $(u, v)$  à un point  $P(x, y)$  est donnée par la formule suivante :

$$D = \frac{ux + vy + 1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{ux + vy + 1}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \cdot \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Cette distance est donc égale au quotient de la distance euclidienne  $\delta$  de  $P$  à  $d$ , par le produit des distances euclidiennes  $r$  de  $O$  à  $P$ , et  $p$  de  $O$  à  $d$ .

$$D = \frac{\delta}{r \cdot p}.$$

L'angle  $\Phi$  de deux droites  $d_1, d_2$ , de coordonnées  $(u_1, u_2)$  et  $(v_1, v_2)$  (correspondant à la distance de deux points du plan euclidien) s'obtient comme suit :

Soit  $R$  le point d'intersection de  $d_1$  et  $d_2$ ; une perpendiculaire en  $O$  sur  $OR$  les coupe en  $M_1$  et  $M_2$ .

Or :

$$\overline{OR} = \frac{\sqrt{(v_1 - v_2)^2 + (u_1 - u_2)^2}}{u_1 v_2 - u_2 v_1},$$

$$\text{tg } \widehat{ORM_1} = \frac{u_1 v_2 - v_1 u_2}{u_1^2 + v_1^2 - u_1 u_2 - v_1 v_2}.$$

D'où il résulte :

$$\Phi = \frac{1}{OM_1} - \frac{1}{OM_2}.$$

## II

5. — Nous appliquons tout d'abord cette transformation au cas le plus simple possible; les propriétés les plus connues des coniques vont se trouver être les transformées de propriétés immédiates du cercle.

Un cercle,  $C$ , passe par les points cycliques; sa courbe correspondante sera donc une conique  $\gamma$  touchant les isotropes du point  $O$ ; une conique dont  $O$  est par conséquent un foyer.  $O$  ayant été

choisi arbitrairement dans le plan du cercle, sa *directrice* sera la correspondante du *centre* de  $C$ ; le *second foyer* de  $\gamma$  sera le transformé de l'*axe radical* de  $C$  et du cercle-point  $O$ .

6. — Nous écrivons maintenant, en face l'un de l'autre, quelques énoncés correspondants, dont l'identité est démontrée par ce qui précède :

$a)$  Les droites projetant deux points fixes d'un cercle depuis un point variable de ce dernier, forment un angle constant.

$b)$  Les tangentes d'un cercle sont également éloignées du centre.

$c)$  Les points d'un cercle sont également éloignés du centre.

$d)$   $O$  est un point arbitraire;  $M$  un point mobile sur un cercle  $c$ ; et  $P$  le pied de la perpendiculaire abaissée de  $P$  sur l'axe radical de  $c$  et du cercle point  $O$ ;

$$\frac{\overline{OM}^2}{\overline{MP}} = \text{constante} .$$

$a')$  Les droites projetant depuis le foyer d'une conique les points où deux tangentes fixes de celle-ci sont coupées par une tangente mobile, forment un angle constant.

$b')$  Le rapport des distances d'un point d'une conique à un foyer et à la directrice correspondante est un nombre constant.

$c')$   $D$  étant le point où une tangente à une conique coupe une directrice,  $O$  le foyer correspondant; et la perpendiculaire en  $O$  sur  $OD$  coupant la tangente en  $M_1$ , et la directrice en  $M_2$  :

$$\frac{1}{\overline{OM}_1} - \frac{1}{\overline{OM}_2}$$

est une constante.

$d')$  Le produit des distances des foyers d'une conique à une tangente variable est une constante.

7. — La transformation que nous étudions fait correspondre à la géométrie des *cercles*, celle des *coniques ayant un foyer commun*. Tous les énoncés de la première se transporteront dans la seconde, aussitôt qu'auront été donnés les équivalents de l'*angle* de deux cercles; et de la *puissance* d'un point par rapport à un cercle.

Deux coniques qui ont un foyer commun possèdent encore deux tangentes communes. Soient  $T_1$  et  $T_2$ ;  $T_1'$  et  $T_2'$  les points de con-



tact sur chacune d'elles : les angles  $T_1OT_2$  et  $T_1'OT_2'$  sont égaux et correspondent à l'angle de deux cercles.

Soit  $a$  une droite arbitraire, et  $P$  un point de cette droite ; ayant mené les tangentes de  $P$  à une conique  $\gamma$ , dont  $O$  est un foyer ; ayant enfin mené en  $O$  la perpendiculaire à  $OP$ , qui coupe  $a$  en  $M$ , et les tangentes en  $M_1$  et  $M_2$  ; l'expression

$$\pi = \left( \frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_1} \right) \left( \frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_2} \right)$$

est constante quel que soit  $P$  sur  $a$ , et correspond à la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Transformons par exemple le théorème suivant dû à M. FAURE<sup>1</sup> : *Les cercles harmoniquement circonscrits à une conique en coupent orthogonalement le cercle orthoptique.*

Soit  $O$  un point arbitraire, qui sera comme plus haut le centre de la transformation ; et  $\gamma$  une conique quelconque. Soit  $c$  la transformée de  $\gamma$  ; les droites qui la coupent en deux points  $R_1$  et  $R_2$  tels que l'angle  $\widehat{R_1OR_2}$  soit droit enveloppent une courbe qui est évidemment la correspondante du cercle orthoptique de  $\gamma$ . C'est une conique dont  $O$  est un foyer, et suivant laquelle  $O$  a la même polaire que suivant  $c$ . Convenons de la nommer la *conique orthoptique de  $c$ , par rapport à  $O$* . Convenons de plus de dire que deux coniques de même foyer  $O$  sont orthogonales lorsque l'angle  $T_1OT_2$ , dont il est question plus haut, est droit. L'énoncé de Faure devient alors le suivant :

*Toutes les coniques dont  $O$  est un foyer et qui sont harmoniquement inscrites à une conique  $c$ , sont orthogonales à la conique orthoptique de  $c$ , par rapport à  $O$ .*

8. — Un faisceau de *coniques homofocales* est transformé dans le faisceau *ponctuel* déterminé par une conique arbitraire et par le cercle-point  $O$ .

Dans ce faisceau se trouvent, en plus du cercle-point  $O$ , deux paires de droites ; l'une est réelle ; les deux droites qui la composent seront dites les *directrices* du point  $O$ .

Les propriétés suivantes sont la traduction de propriétés correspondantes des coniques homofocales.

*Une droite  $d$  est coupée par les courbes de ce faisceau en des couples de points qui forment une involution ; les points doubles de celle-ci sont les points de contact des deux courbes du faisceau qui touchent  $d$  ; cette involution est projetée depuis  $O$  par les rayons d'une involution symétrique.*

L'énoncé  $a')$  devient :

<sup>1</sup> FAURE, *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 234.

Ayant choisi deux points fixes sur une conique, et les ayant projetés depuis un point mobile, soient  $N_1$  et  $N_2$ , les points où les rayons projetants coupent l'une et l'autre directrices du point  $O$ ; l'angle  $N_1ON_2$  est constant,

et l'énoncé  $d'$  par exemple :

Le produit  $\frac{q}{d_1} \cdot \frac{q}{d_2}$  (où  $q$  est la distance d'un point arbitraire de la courbe au point  $O$ ;  $d_1$  et  $d_2$  les distances aux directrices de  $O$ ), est une constante.

Si  $O$  est un foyer, ses directrices coïncident; et l'on retrouve l'énoncé  $b'$ ).

9. — Plus généralement, transformons l'ensemble des courbes de  $n^{\text{ième}}$  classe ayant les mêmes foyers qu'une courbe donnée  $\Gamma_n$ . Les courbes transformées sont du  $n^{\text{ième}}$  ordre et forment un système linéaire ponctuel. Parmi elles se trouve une courbe comprenant  $n$  droites réelles. Ces  $n$  droites seront les  $n$  directrices réelles du point  $O$ , suivant  $C_n$ , la transformée de  $\Gamma_n$ .

Et les deux énoncés suivants de Laguerre :

Les  $n$  tangentes menées à  $\Gamma_n$  depuis un point quelconque ont même orientation que le groupe des  $n$  droites allant aux foyers réels de  $\Gamma_n$ ; et

Les  $mn$  tangentes communes à deux courbes  $\Gamma_m$  et  $\Gamma_n$  ont même orientation que le groupe des  $mn$  droites joignant tous les foyers réels de  $\Gamma_m$  à tous les foyers réels de  $\Gamma_n$

prennent la forme suivante :

Les  $n$  points d'intersection d'une droite arbitraire avec une courbe  $C_n$  d'une part, et les  $n$  directrices d'un point quelconque  $O$  d'autre part sont projetées depuis  $O$  par deux groupes de rayons ayant même orientation.

Les  $mn$  points d'intersection de deux courbes  $C_m$  et  $C_n$  sont projetées depuis un point arbitraire  $O$  suivant  $mn$  droites ayant même orientation que le groupe des  $mn$  droites projetant les  $mn$  intersections de toutes les directrices du point  $O$  suivant  $C_m$  avec toutes les directrices du même point suivant  $C_n$ .

On pourrait aisément multiplier les exemples. En règle générale toute propriété métrique se transforme en une nouvelle, d'essence plus générale, si le centre de la transformation ne prend pas quelque position spéciale.

### III

10. — On peut opérer une transformation semblable dans l'espace. L'espace transformé peut être considéré comme *non-euclidien*, avec la *quadrique absolue*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

On le déduit de l'espace euclidien par *polarité* suivant la sphère imaginaire

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0 ,$$

ou par *antipolarité* suivant une sphère de rayon unité.

11. — On vérifiera que les notions habituelles sont à remplacer comme suit :

*L'angle de deux plans* par *l'angle des rayons* projetant les points transformés depuis le centre O de la transformation.

La *distance* D d'un point à un plan par le quotient de la distance  $\delta$  du plan transformé  $\pi$  au point transformé P par le produit de la distance  $q$  de O à P, et de la distance  $p$  de O à  $\pi$

$$D = \frac{\delta}{q \cdot p} .$$

La *distance de deux points* par l'expression

$$\frac{1}{OM_1} - \frac{1}{OM_2} ,$$

où les points  $M_1$  et  $M_2$  sont définis comme suit : Soient  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les deux plans transformés, et  $r$  leur droite d'intersection ; la perpendiculaire en O sur le plan  $(O, r)$  coupe  $\pi_1$  en  $M_1$  et  $\pi_2$  en  $M_2$ .

La *plus courte distance de deux droites* par

$$\frac{1}{ON_1} - \frac{1}{ON_2} ,$$

où les points  $N_1$  et  $N_2$  sont les intersections des droites transformées avec leur transversale commune passant par O.

*L'angle de deux droites*, enfin, par *l'angle des plans* projetant les transformées depuis O.

12. — Transformons, par exemple, un faisceau de quadriques homofocales. Ceci nous conduira à décrire une quadrique, *telle qu'on la voit depuis un point arbitraire*, O. Mettons encore en regard les propriétés en question et celles auxquelles elles correspondent :

Le lieu des sommets des cônes de révolution tangents à une quadrique F se compose de trois coniques, les focales de la quadrique.

Les plans qui coupent une quadrique  $\Phi$  suivant des coniques telles qu'elles soient projetées depuis un point O par des cônes de révolution enveloppent trois cônes que nous nommerons les *cônes focaux du point O*.

Deux de ces focales sont tou-

Deux de ces cônes sont tou-

jours réelles, la troisième est imaginaire.

Les plans de ces coniques sont les plans principaux de la quadrique  $F$ .

Les focales réelles d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde sont une ellipse et une hyperbole.

Les focales réelles d'un paraboloides sont deux paraboles.

Une *section circulaire* de  $F$  est transformée en un cône tangent à  $\Phi$  dont un *axe* passe par  $O$ . Par conséquent le lieu des sommets de pareils cônes se compose de six droites passant par  $O$ , dont il serait facile de préciser la position et les conditions de réalité. En particulier, les plans tangents à  $\Phi$  aux points où ces droites coupent cette quadrique seront les *plans ombilicaux* du point  $O$ . On a encore

Toutes les quadriques ayant mêmes focales forment un faisceau homofocal.

Les focales sont aussi le lieu des ombilics des quadriques homofocales.

jours réels, le troisième est imaginaire.

Le point  $O$  est le sommet d'un trièdre trirectangle conjugué à la quadrique  $\Phi$ . Les sommets de ces cônes sont à l'intersection des arêtes de ce trièdre avec le plan polaire de  $O$ .

Si le point  $O$  est à l'extérieur ou à l'intérieur de  $\Phi$ , il se trouve à l'intérieur de l'un et à l'extérieur de l'autre cône réel.

Si  $O$  est sur  $\Phi$ , les deux cônes passent par ce point.

Toutes les quadriques suivant lesquelles les cônes focaux du point  $O$  sont les mêmes que suivant  $\Phi$ , forment un faisceau ponctuel, défini par la quadrique  $\Phi$ , et par la sphère point  $O$ .

Les cônes focaux de  $O$  sont aussi l'enveloppe des plans ombilicaux du même point pour les quadriques du faisceau qui vient d'être défini.

Jusqu'ici ne sont guère intervenues que des relations d'*angles* (à côté de propriétés polaires) qu'on retrouverait par une transformation du même système homofocal par polarité suivant une sphère arbitraire de centre  $O$ . Pour introduire d'autres grandeurs, partons des énoncés suivants dus à REYE<sup>1</sup>, en même temps qu'à d'autres auteurs<sup>2</sup>.

Un ensemble de points pesants (de masses positives ou négatives) étant donné, les plans pour lesquels le moment quadratique (d'inertie) de cet ensemble est une constante donnée, enveloppent

REYE, *Journal für Mathem.*, 72 (1870).

Par exemple BINET, *Journal de l'Ecole polyt.*, 16.

une quadrique ; lorsque la constante varie, la quadrique décrit un faisceau homofocal. Soit  $F$ , en particulier, la quadrique correspondant à la valeur  $O$ . On peut remplacer tout le système pesant par quatre masses disposées aux sommets d'un tétraèdre polaire arbitraire de  $F$ .

Si la masse qu'on veut disposer en un de ces sommets est donnée d'avance, ce dernier peut être choisi arbitrairement sur une quadrique  $F'$ , ayant même cône asymptotique que  $F$ .

Il suffira de remplacer partout la distance d'un point du système pesant à un plan arbitraire par l'expression  $\frac{\delta}{\rho \cdot p}$ , où les lettres ont la signification donnée au n° 11.

Par commodité nommons *moment relatif au point*  $O$ , d'un point pesant à un plan, ou d'un plan massif à un point, l'expression ainsi transformée des moments habituels. Les  $p$  sont d'ailleurs dans ce cas des constantes. Les énoncés cités deviennent alors :

Un ensemble de plans massifs étant donné (de masses positives ou négatives), le lieu des points pour lesquels le moment, quadratique et relatif au point  $O$ , du système est une constante, est une quadrique  $\Phi$ . Lorsque la constante varie, la quadrique décrit un faisceau ponctuel, contenant la sphère point  $O$ . On peut remplacer le système de plans massifs par quatre plans massifs, formant un tétraèdre polaire, d'ailleurs arbitraire, de  $\Phi$ .

Si la masse d'un de ces quatre plans est donnée d'avance, il peut être choisi quelconque, parmi les plans tangents à une certaine quadrique qui touche  $\Phi$  en tous les points de contact de ses tangentes menées de  $O$ .

13. — Comme dernière application enfin, considérons deux surfaces, l'une de  $n^{\text{ième}}$  ordre  $F_n$ , l'autre de  $n^{\text{ième}}$  classe  $\Phi_n$ , qui soient *apolaires*. Nous définirons, avec REYE<sup>1</sup>, la surface  $\Phi_n$  comme suit : Elle est l'enveloppe des plans pour lesquels la somme des moments du  $n^{\text{ième}}$  ordre d'un système de points pesants est nulle ; cet ensemble de points est un *système définissant de*  $\Phi_n$ .  $F_n$  sera déterminée, semblablement, par un système de plans massifs. Et maintenant l'énoncé suivant<sup>2</sup> est juste :

$F_n$  et  $\Phi_n$  sont *apolaires* quand le moment mixte de tout système définissant  $F_n$ , par rapport à tout système définissant  $\Phi_n$ , est nul. (Le moment mixte d'un point  $P$  de masse  $m$  et d'un plan  $\pi$  de masse  $\mu$ ,  $\delta$  étant la distance  $P$  à  $\pi$ , vaut naturellement  $m\mu\delta^n$ .)

Ces définitions et ce dernier énoncé valent encore lorsque  $\delta$  est partout remplacé par  $\frac{\delta}{\rho \cdot p}$ , c'est-à-dire lorsque les moments habituels sont remplacés par les moments relatifs à un point arbitraire.

<sup>1</sup> REYE, *Journ. für Mathem.*, 78 (1874).

<sup>2</sup> Cet énoncé ne se trouve pas dans le travail cité de Reye. Il en est une conséquence assez naturelle.

14. — *Remarque.* Nous avons supposé la conique absolue de notre plan non-euclidien formée des deux droites isotropes du point  $O$ ; et dans l'espace la quadrique absolue était le cône isotrope de ce même point. On aurait pu naturellement faire toute autre supposition : par exemple la conique se composera de deux droites rectangulaires par  $O$ . Au lieu de trouver les propriétés des foyers des coniques, on en trouvera d'autres qui vaudront pour tout point des coniques orthoptiques de ces dernières. Et dans l'espace la sphère orthoptique d'une quadrique s'introduira, si l'absolu est un cône équilatère.

Les propriétés trouvées sont moins simples que celles qui sont décrites plus haut et d'ailleurs faciles à établir.

---

## SUR LA FONCTION RÉSISTANCE $F(\varphi)$ DE LA BALISTIQUE

PAR

G. TIERCY (Genève).

---

1. — On sait que le problème physique, qui consiste à chercher la trajectoire d'un projectile pesant dans l'atmosphère terrestre, est hérissé de difficultés; si on le considère tel qu'il se présente, dans toute sa complexité, il est inabordable dans l'état actuel de la science.

Même en le simplifiant par l'abandon des termes secondaires des perturbations dues à l'atmosphère ou au projectile lui-même, c'est-à-dire même en ne considérant que le problème balistique principal<sup>1</sup>, on se heurte d'emblée à une difficulté considérable provenant de l'ignorance complète, où l'on se trouve, de la forme analytique de la fonction « résistance » de l'air.

L'étude théorique des lois de cette résistance est extrêmement en retard, comparée à leur étude expérimentale; cette dernière a été poussée très loin par les artilleurs, car il leur était nécessaire de connaître les valeurs numériques de la résistance atmosphérique; leurs expériences ont révélé les trois lois suivantes :

---

<sup>1</sup> Mouvement dans un milieu résistant, homogène, immobile, d'un point matériel pesant soumis à l'action : 1° de la gravité, force toujours constante et parallèle, 2° de la résistance de l'air, force toujours tangentielle.