SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE STEINER-HABIGH CONCERNANT LES ROULETTES ET LES PODAIRES APPLIQUÉE AUX ORBIFORMES D'EULER

Autor(en): **Braude, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17326

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE STEINER-HABICH CONCERNANT LES ROULETTES ET LES PODAIRES APPLIQUÉE AUX ORBIFORMES D'EULER

PAR

L. BRAUDE (Bierstadt).

---

1. — On connaît le théorème du géomètre suisse STEINER [1] sur les roulettes à base rectiligne (R) et les podaires Π, théorème demandant l'égalité des arcs correspondants de ces deux courbes dérivées d'une courbe plane (Γ). Nous avons généralisé ce théorème dans notre thèse [2] en faisant rouler une courbe Γ dont l'équation intrinsèque est

$$(\Gamma) \qquad R = f(s) \ , \tag{1}$$

sur la courbe à *courbure proportionnelle :*

$$(\Gamma_1) \qquad R' = \mu \, . \, f(s) \tag{2}$$

μ étant constant. L'arc de la podaire de Γ ou de la roulette à base rectiligne étant[3]

$$\sigma = \int \frac{\rho}{R} ds \ , \tag{3}$$

celui de la roulette de Γ sur Γ_1 :

$$\sigma' = \int \rho \left[\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right] ds = \frac{1 \pm \mu}{\mu} \int \frac{\rho}{R} ds \tag{4}$$

on reconnaît bien facilement cette généralisation.

---

[1] J. STEINER, *Journal de Crelle*, 21, 1840, p. 101, Voir aussi H. WIELEITNER, *Spez. ebene Kurven*, Coll. Schubert, p. 308.

[2] L. BRAUDE, *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffs der Mannheimschen Kurve*, Heidelberg, 1911, p. 38.

[3] H. WIELEITNER, *loc. cit.* p. 182 ; voir aussi notre petit opuscule : *Les coordonnées intrinsèques, théorie et application*, coll. Scientia, Gauthier-Villars, Paris 1914, p. 82.

2. D'après HABICH[1] on peut faire rouler la roulette à base rectiligne (Φ) sur la podaire (Π) de (Γ) de sorte que la base passe toujours par le pôle de Π; par inversion du roulement, le pôle de Π parcourt la base droite de (Φ); enfin, en faisant rouler Π ou (Φ) sur une courbe quelconque (Γ_1), la roulette du pôle de (Π) est identique à l'enveloppe de la base de (Φ). Nous y mentionnons encore la variation de ce théorème, en regardant (Φ) et (Π) comme courbe de Mannheim ou comme radiale d'une autre courbe (C_1); cette variation fut trouvée presque en même temps par M. G.-B. SANTANGELO[2] et par moi.

3. — Dans un article[3] donné aux *Monatsh. d. M. u. Ph.*, nous avons généralisé le théorème de HABICH, en faisant rouler une courbe (Γ) sur un nombre quelconque de courbes planes (B_1), (B_2), ... (B_n), pour avoir comme roulette d'un point P fixe sur le plan de Γ les courbes (Φ_1), (Φ_2), ... (Φ_n). De même, on peut engendrer cette famille de courbes (Φ_k) comme enveloppes d'une courbe (Ψ) fixe sur le plan de (Γ); la courbe (Ψ) touche son enveloppe toujours aux points, dont la normale passe par le centre de courbure de (Γ), correspondant au point de contact P de (Γ) et de (B_k). De là il résulte que les coordonnées de ces points au système (tangente, normale) de (B_k) sont toujours les mêmes, indépendants de la courbe (B_k) elle-même; enfin nous trouvons notre généralisation :

Quand on fait rouler les courbes (B_k) *sur une courbe quelconque* C, *on aura toujours la même enveloppe*

$$E[C\,;\ B_k(\Psi\,,\ \Gamma)]$$

de la courbe Φ_k.

Exemples : a). La roulette du centre d'une circonférence roulant sur la courbe (B) est une courbe parallèle ; de là il résulte : *Quand on fait rouler une courbe* (B) *sur une courbe* (C), *l'enveloppe d'une courbe parallèle au profil générateur*

---

[1] Voir WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 310 ; L. BRAUDE, *loc. cit.*, note 3, p. 89-91.

[2] G. B. SANTANGELO, *Sulla curva di Mannheim*, etc. *Rend. Circ. Mat. Palermo XXIX*, 1910 ; voir de même notre thèse, p. 44.

[3] *Ueber eine Verallgemeinerung des Steiner-Habichschen Satzes über Roll und Fusspunktkurven*, Monatshefte d. Math. u. Phys. 1918.

est une courbe parallèle à la base ; de ce théorème, on connaît bien les cas où (B) est une droite ou un point[1].

b) De même, on trouve[6] : *Quand on fait rouler une courbe* (B) *sur une courbe* (C), *l'enveloppe d'une développante de* (B) *est une développante de* (C).

c) La roulette du pôle d'une spirale logarithmique

$$R = s \operatorname{tg} \alpha$$

est la développoïde (α) d'une développante de la base curviligne[2]; de là, il résulte : *Quand on fait rouler une courbe* (B) *sur la courbe* (C), *l'enveloppe d'une développoïde* (α) *d'une développante* (B^1) *de* (B) *est la développoïde* (α), *d'une développante de* (C).

d) Entre la courbe de Mannheim, la radiale et l'arcuïde, il y a la contenance suivante[3] : *Quand on fait rouler la radiale sur la courbe de Mannheim de sorte que la roulette du pôle est la base rectiligne* (*axe des* x), *on aura comme enveloppe d'une droite fixe menée par le pôle de la radiale une arcuïde ;* la variation de la droite correspond à une transformation traitée d'une manière approfondie par M. E. Kœstlin[4]. Mais quand on fait rouler la radiale de (Γ) sur la développée intermédiaire d'une courbe à courbure proportionnelle (Γ_1) rectifiable par les mêmes arcs, on aura[5] comme enveloppe d'une droite menée par le pôle une causticoïde de Γ' ; de là il résulte : *Quand on fait rouler sur la développée intermédiaire de* (Γ) *la courbe de Mannheim d'une courbe à courbure proportionnelle, l'enveloppe d'une arcuïde est une causticoïde* de la courbe (Γ). Par exemple, on peut faire rouler la spirale logarithmique, représentant la base curviligne de l'arcuïde dont l'équation intrinsèque[6] est

$$R = ce^{m\varphi} \cos n\varphi \qquad (C) , \qquad (5)$$

---

[1] H. Wieleitner, *loc. cit.* p. 186.

[2] Pour la base circulaire, voir H. Wieleitner, p. 322 ; pour la base générale voir notre thèse, p. 46 ; L. Braude, *loc. cit.* 3, p. 92.

[3] L. Braude, Enseign. Math., XVI, 1914, p. 360 ; *loc. cit.* 3, p. 97.

[4] H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 384 et suiv.

[5] L. Braude, *loc. cit.* 3, p. 40 (12). L. Braude. *Sur quelques généralisations d'une transformation de M. E. Kœstlin*, Annales Acad. Porto, IX, 1914, *loc. cit.* 3, p. 17.

[6] L. Braude, *Sur quelques généralisations d'une transformation de M. E. Kœstlin*, Ann. Acad. Porto, IX, 1914 ; *loc. cit.* 3, p. 17.

sur une autre spirale, pour engendrer une courbe du même type comme enveloppe de (C).

4. — Appliquons ce théorème aux orbiformes d'EULER, courbes définies par le grand géomètre à l'aide des deux propriétés *que chaque normale est en même temps binormale, de sorte que la corde comprise entre ces deux points soit toujours constante,* propriétés supposées d'abord comme caractéristique pour la circonférence seule. On aura par exemple une telle courbe en faisant rouler une cardioïde à l'extérieur d'une hypocycloïde à un nombre impair de rebroussements réels. En supposant comme base l'hypocycloïde tricuspidale (de STEINER) :

$$R = a \cos 3\varphi \ , \tag{6}$$

l'équation intrinsèque de l'orbiforme est

$$R = \frac{a}{3}(1 + \cos 3\varphi) \ . \tag{7}$$

Quand on fait rouler une telle orbiforme sur une courbe quelconque (Γ), l'enveloppe de l'orbiforme est une courbe parallèle à (Γ). Soit Γ par exemple la développante d'une circonférence ; alors l'enveloppe est une courbe parallèle, c'est-à-dire congruente à la base.

Faisons maintenant rouler une orbiforme sur une autre orbiforme ; alors l'enveloppe est toujours une orbiforme si les deux courbes roulent à courbure opposée ; quand elles roulent en même courbure on aura des orbiformes seulement en évitant l'intervalle pourvu de rebroussements.

Supposons enfin les deux orbiformes congruentes entre elles ; *alors on aura, au cas du même sens de courbure, la base elle-même comme enveloppe.* La position initiale est sans aucune influence sur la nature de l'enveloppe ; naturellement, au dernier cas il faut éviter que les deux courbes se touchent complètement, autrement il n'y a aucun roulement. L'une des deux orbiformes peut être une circonférence ; mais quand on a deux circonférences congruentes en même sens de courbure, on peut les faire glisser l'une sur l'autre, ce qui est impossible aux autres orbiformes.