

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	19 (1917)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	NOTE SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE
Autor:	Daniëls, M.-Fr.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-17325

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

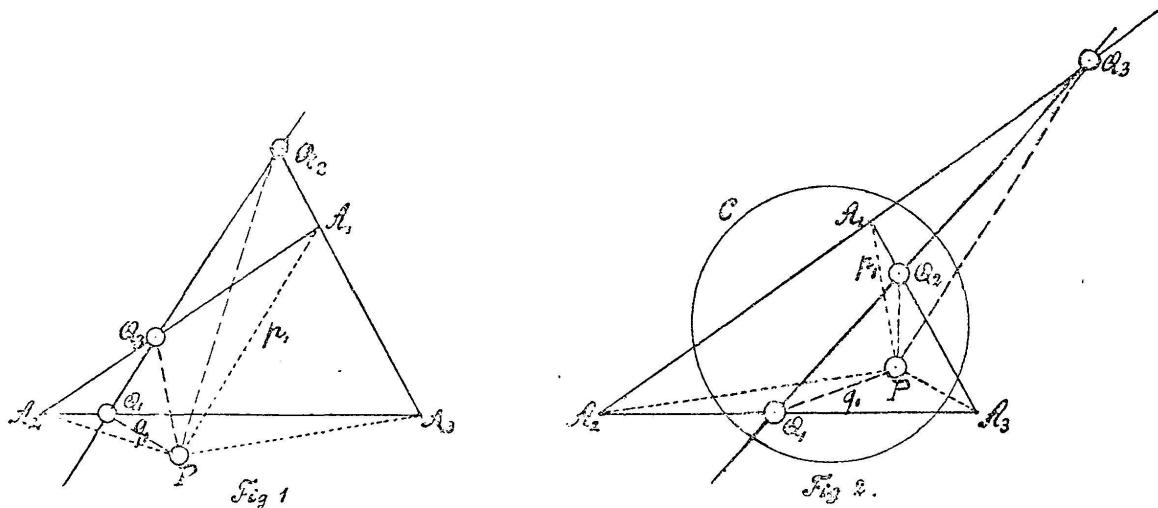
NOTE SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE

PAR

M.-Fr. DANIËLS (Fribourg, Suisse).

Nous développons dans cette note quelques théorèmes bien simples, échappés à ce qu'il paraît à l'attention des géomètres qui se sont occupés de la géométrie du triangle et du tétraèdre.

1. — *Lorsque aux droites sphériques ou grands cercles p_i ($i = 1, 2, 3$) qui relient un point quelconque $P(\mathbf{r}_0)$ de la surface sphérique aux sommets $A_i(\mathbf{r}_i)$ d'un triangle sphérique on élève en P même des normales q_i , ces nouvelles droites sphériques coupent les côtés correspondants du triangle en trois points Q_i qui sont collinéaires.*



On peut remplacer la surface sphérique par un plan (fig. 1), et les normales q_i par des droites conjuguées aux p_i par rapport à une conique C sphérique ou plane (fig. 2).

Ce théorème est une conséquence immédiate de l'identité vectorielle :

$$V\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3 + V\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_3 \mathbf{f}_1 + V\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \equiv 0$$

où, pour plus de simplicité, les virgules remplacent encore des V, signes de la multiplication vectorielle ou externe. En effet, nous trouvons, si les P_i sont les vecteurs des côtés du triangle, successivement pour le premier sommet A_1 , pour la droite p_1 , pour la normale q_1 passant par P, et pour son point d'intersection Q_1 avec le premier côté les vecteurs suivants¹:

$$A_1 \equiv V\mathbf{f}_2\mathbf{f}_3, \quad p_1 \equiv V\mathbf{r}, \mathbf{f}_2\mathbf{f}_3, \quad q_1 \equiv V\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{f}_2\mathbf{f}_3 \\ Q_1 \equiv V\mathbf{f}_1, \mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{f}_2\mathbf{f}_3.$$

Ce dernier point² donnant avec les deux autres qui s'en déduisent par permutation cyclique des indices une somme qui est identiquement nulle, les trois points Q_i sont bien collinéaires, c. q. f. d.

2. — *Lorsque aux droites p_i qui relient un point quelconque de l'espace P aux sommets A_i d'un triangle plan, on construit au point P même des plans normaux π_i , ces nouveaux plans coupent les côtés correspondants du triangle en trois points Q_i qui sont collinéaires.*

On peut remplacer les plans normaux π_i par des plans conjugués aux droites p_i par rapport à une quadrique.

Pour démontrer ce théorème on peut se servir avec avantage des méthodes de Grassmann. En effet, on a successivement pour la droite p_1 , pour la droite conjuguée p'_1 , pour le plan π_1 passant par cette dernière droite et le point P, enfin pour l'intersection Q_1 de ce plan avec le premier côté du triangle

$$p_1 \equiv [A_1P], \quad p'_1 \equiv |[A_1P], \quad \pi_1 \equiv [P | A_1P] \\ Q_1 \equiv [A_2A_3 | P | A_1P] = (A_3P | A_1P)A_2 - (A_2P | A_1P)A_3.$$

Or ce dernier point, donnant avec les deux autres, qu'on en déduit par permutation cyclique une somme qui est iden-

¹ Voir *l'Enseignement Mathématique*, VII, no 3 : *Les coordonnées projectives sur la sphère* ou *Essai de géométrie sphérique*, Fribourg 1907.

² En développant on trouve

$$V\mathbf{r}, \mathbf{f}_2\mathbf{f}_3 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_3)\mathbf{f}_2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_2)\mathbf{f}_3; \quad V\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{f}_2\mathbf{f}_3 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_3) V\mathbf{r}\mathbf{f}_2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_2) V\mathbf{r}\mathbf{f}_3 \\ V\mathbf{f}_1, \mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{f}_2\mathbf{f}_3 = [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_3)(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_2)(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_3)]\mathbf{r} + (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}_3 - (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}_2.$$

tiquement nulle, les trois points Q_i sont bien collinéaires.
C. q. f. d.

On arrive à une autre démonstration de ce théorème, dont le premier constitue, au moins pour le plan, un cas spécial, en prenant le point P comme centre d'une sphère et en considérant avec le triangle sphérique produit par les droites PA_i le trialatère polaire produit par les plans π_i . Nous nous proposons de revenir dans une note ultérieure sur certains théorèmes similaires, où le point est remplacé par une droite quelconque ou un plan quelconque.

3. — *Lorsqu'aux droites p_i qui relient un point quelconque P aux sommets A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) d'un tétraèdre, on construit au point P même les plans normaux π_i , ces nouveaux plans coupent les faces correspondantes du tétraèdre selon quatre droites q_i , génératrices d'un hyperboloïde.*

Au lieu des plans normaux π_i on peut prendre des plans conjugués aux droites p_i par rapport à une quadrique.

Ici encore les méthodes de Grassmann fournissent une démonstration bien simple. On trouve, en effet, successivement pour la droite p_1 , pour la droite conjuguée p'_1 , pour le plan π_1 et pour son intersection q_1 avec la première face du tétraèdre :

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv [A_1 P] , \quad p'_1 \equiv | [A_1 P] , \quad \pi_1 \equiv [P | A_1 P] \\ q_1 &\equiv [A_2 A_3 A_4 \quad P | A_1 P] . \end{aligned}$$

Or cette droite et les trois autres qui s'en déduisent par permutation cyclique des indices peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} & (A_1 P | A_2 P)[A_3 A_4] + (A_1 P | A_3 P)[A_4 A_2] + (A_1 P | A_4 P)[A_2 A_3] \\ - & (A_2 P | A_3 P)[A_4 A_1] - (A_2 P | A_4 P)[A_1 A_3] - (A_2 P | A_1 P)[A_3 A_4] \\ & (A_3 P | A_4 P)[A_1 A_2] + (A_3 P | A_1 P)[A_2 A_4] + (A_3 P | A_2 P)[A_4 A_1] \\ - & (A_4 P | A_1 P)[A_2 A_3] - (A_4 P | A_2 P)[A_3 A_1] - (A_4 P | A_3 P)[A_1 A_2] . \end{aligned}$$

Leur somme est nulle ; les quatre droites sont donc des génératrices d'un hyperboloïde.

Fribourg, le 30 septembre 1917.