

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1917)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE
Autor: Turrière, Emile
Kapitel: L'arithmotrigonométrie et les arithmotriangles héroniens.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-17324>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

pour paramètres, et si x et ξ sont pris pour coordonnées dans un certain plan, cette quartique est la projection d'une biquadratique gauche, intersection du paraboloïde, représenté dans un espace (x, ξ, ζ) par l'équation

$$x\xi = \zeta,$$

et d'une quadrique rapportée à ses axes :

$$(\eta^2 + 1)x^2 + (y^2 - 1)\xi^2 + \zeta^2 = \eta^2 - y^2 - 1 - y^2\eta^2.$$

82. — L'ÉQUATION $\text{tang } \theta = \square + \square$. Avant de passer à une nouvelle question, quelques lignes s'imposent au sujet de l'équation $\text{tang } \theta = \square + \square$, ou de l'équation équivalente $\text{cotang } \theta = \square + \square$.

Cette équation arithmotrigonométrique se traduit algébriquement sous la forme

$$\frac{x^2 - 1}{2x} = \square + \square,$$

c'est-à-dire encore :

$$x^2 - 1 = x(y^2 + z^2);$$

cette dernière équation représente, dans l'espace ordinaire, une surface du troisième degré (voir paragraphe 36) sur laquelle existent tous les arithmopoints qui correspondent aux solutions des équations *simultanées* $\sin \theta = \square + \square$ et $\cos \theta = \square + \square$. De sorte que la solution de l'équation $\text{tang } \theta = \square + \square$ dépend de celle du problème qui vient d'être traité dans les paragraphes précédents.

L'arithmotrigonométrie et les arithmotriangles héroniens.

83. — APPLICATION DE LA NOTION D'ARITHMODISTANCE. J'ai souvent utilisé dans les considérations antérieures la notion d'arithmodistance et introduit le *problème des arithmodistances*, soit pour créer de nouveaux types d'équations indéterminées, soit pour rattacher à une idée générale certaines équations particulières.

En se bornant au cas de l'arithmocourbe plane (C), dont

l'arithmopoint M est repéré par ses coordonnées x et y et d'un arithmopoint fixe A de coordonnées a , b , le problème des arithmodistances pour cet arithmopoint A et l'arithmocourbe (C) est résolu par l'équation générale (paragraphe 17)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \square .$$

Pour les développements qui vont suivre et qui ont toujours pour objet la constitution de l'arithmotrigonométrie, il est avantageux d'observer que cette même équation est entièrement équivalente à une équation arithmotrigonométrique d'une espèce spéciale, que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{y - b}{x - a} = \tan \theta ,$$

dans laquelle θ est un azimut tel que $\tan \frac{\theta}{2}$ est un nombre rationnel. Cette même équation a d'ailleurs une signification précise, puisqu'elle se présente tout naturellement lorsque le problème des arithmodistances est posé sous la forme suivante.

Soient un arithmopoint connu A et une arithmocourbe (C) dont l'arithmopoint courant M est repéré par un paramètre rationnel t . Quels sont ceux des arithmopoints M de l'arithmocourbe imposée (C) qui définissent avec l'arithmopoint donné A des droites arithmodirigées ?

Cette remarque est féconde en ce sens qu'un grand nombre de cas spéciaux du problème des arithmodistances se laissent traduire par des équations arithmotrigonométriques souvent simples et, souvent aussi, de formes remarquables. Il en est notamment ainsi lorsque la courbe imposée (C) est paramétriquement représentée par l'intermédiaire de fonctions trigonométriques, comme pour l'ellipse.

Pour l'ellipse, dis-je, dans le cas de la représentation au moyen des demi-axes α et β supposés rationnels et de l'anomalie excentrique φ . supposée telle que $\tan \frac{\varphi}{2}$ soit un paramètre rationnel, il résulte des expressions des coordonnées

$$x = \alpha \cos \varphi , \quad y = \beta \sin \varphi ,$$

que le problème des arithmodistances pour cette arithmo-ellipse et un arithmopoint général de son plan se traduit par l'équation

$$\frac{\beta \sin \varphi - b}{\alpha \cos \varphi - a} = \tan \theta ;$$

trois paramètres arbitraires, les rapports des quatre nombres rationnels a , b , α et β , assurent à cette équation arithmo-trigonométrique une assez grande généralité. Elle contient en effet comme cas particulier deux de ceux qui vont faire l'objet de considérations spéciales (paragraphe 86) et auxquelles conduit la détermination de certaines espèces d'arithmotriangles héroniens :

$$\frac{\sin \varphi}{\tan \theta} = \text{const.} .$$

$$\frac{\tan \varphi}{\tan \theta} = \text{const.} .$$

84. — Le problème des triangles télémétriques m'a tout naturellement amené aux paragraphes 67 et 68 à rechercher s'il existait ou non des arithmotriangles héroniens dont deux côtés soient dans un rapport donné *a priori*.

Proposons-nous d'une manière générale de rechercher tous les arithmotriangles héroniens dont les côtés a , b , c satisfont à une condition donnée :

$$f(a, b, c) = 0 .$$

D'après les formules du paragraphe 10, il faut donc déterminer trois nombres rationnels R , x , et y , satisfaisant aux inégalités

$$R > 0 , \quad \frac{1}{\sqrt{3}} > z > 0 , \quad \sqrt{1 + z^2} - z > y > z ,$$

et reliés entre eux par la relation :

$$f \left[4R \frac{(y + z)(1 - yz)}{(1 + y^2)(1 + z^2)} , \quad 4R \cdot \frac{y}{1 + y^2} , \quad 4R \cdot \frac{z}{1 + z^2} \right] = 0 .$$

Cette dernière équation représente, dans un système de coordonnées y , z et R , une certaine surface. D'où il résulte

que le *problème considéré de détermination d'arithmotriangles héroniens est équivalent à l'étude arithmogéométrique d'une surface de l'espace ordinaire.*

Il n'est guère possible de s'étendre davantage sur un problème aussi général; pour aller plus loin, il est nécessaire de le particulariser.

Parmi les cas particuliers remarquables, il convient de signaler en première ligne celui d'une condition homogène. Lorsque la relation imposée

$$f(a, b, c) = 0$$

est homogène, le problème général, susceptible d'être associé à l'étude d'une surface, dégénère en un *problème d'arithmogéométrie autour d'une courbe plane*. Les coordonnées d'un certain plan étant x et z , cette courbe est celle que représente l'équation

$$f[(y+z)(1-yz), y(1+z^2), z(1+y^2)] = 0.$$

85. — Dans ce même cas d'une relation homogène entre les côtés de l'arithmotriangle héronien, cette relation imposée peut être écrite sous la forme :

$$f(\sin A, \sin B, \sin C) = 0;$$

des cas particuliers intéressants s'obtiennent en se bornant à des équations entre $\sin B$ et $\sin C$, par exemple.

C'est ainsi que, si la condition imposée est une relation homographique entre $\sin B$ et $\sin C$, soit

$$\alpha \sin B \cdot \sin C + 2\beta \sin B + 2\gamma \sin C + 4\delta = 0,$$

cette condition se traduit par l'équation

$$\alpha yz + \beta y(1+z^2) + \gamma z(1+y^2) + \delta(1+y^2)(1+z^2) = 0,$$

représentative d'une quartique plane. Cette courbe est la projection sur le plan Oyz de la biquadratique gauche, intersection du parabolôïde hyperbolique d'équation

$$yz - x = 0,$$

avec une quadrique d'équation :

$$\delta(x^2 + y^2 + z^2) + x(\gamma y + \beta z) + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Le cas ($\alpha = 0$, $\delta = 0$), c'est-à-dire celui de l'équation arithmotrigonométrique

$$\frac{\sin C}{\sin B} = n ,$$

est précisément celui qui a fait l'objet des considérations du paragraphe 68. Le problème dépend de l'équation

$$y^4 + 2ky^2 + 1 = \square ,$$

étudiée par L. EULER, A. GENOCCHI et Ed. LUCAS (cf. § 51).

86. — Soit une équation du type précédent

$$y^4 + 2ky^2 + 1 = \square ;$$

elle peut être mise sous les deux formes suivantes :

$$(y^2 + 1)^2 + 2(k - 1)y^2 = \square ,$$

$$(y^2 - 1)^2 + 2(k + 1)y^2 = \square ;$$

dans le cas où $2(k - 1)$ est un carré parfait, soit

$$2(k - 1) = 4\omega^2 ,$$

l'expression

$$\frac{2\omega y}{1 + y^2}$$

peut être égale à la tangente d'un arc θ tel que $\tan \frac{\theta}{2}$ soit rationnel. Si donc on pose

$$y = \tan \frac{\Theta}{2} ,$$

on a

$$\omega \cdot \sin \Theta = \tan \theta ;$$

réciproquement, l'équation précédente dans laquelle ω est un nombre rationnel et Θ et θ deux arcs tels que $\tan \frac{\Theta}{2}$ et $\tan \frac{\theta}{2}$ soient rationnels est réductible à une équation

$$y^4 + 2ky^2 + 1 = \square .$$

Si d'autre part $2(1 - k)$ est un carré, soit $4\omega^2$, l'expression $\frac{2\omega y}{1 + y^2}$ peut être égale à un sinus d'un arc θ ; on est ainsi

conduit à une équation

$$\omega \cdot \sin \Theta = \sin \theta ;$$

c'est précisément ce qui se produit au paragraphe 68.

Considérons de même l'équation

$$(y^2 - 4)^2 + 2(k + 1)y^2 = \square .$$

Lorsque $2(k + 1)$ est de la forme $-4\omega^2$, l'expression $\frac{2\omega y}{1 - y^2}$, c'est-à-dire $\omega \operatorname{tang} \Theta$ est égale à un sinus et l'on retombe sur une équation

$$\omega \operatorname{tang} \Theta = \sin \theta$$

déjà traitée.

Enfin lorsque $2(k + 1)$ est un carré $4\omega^2$, l'équation n'est autre que

$$\omega \operatorname{tang} \Theta = \operatorname{tang} \theta .$$

Celle-ci n'est d'ailleurs pas essentiellement distincte de l'équation

$$\omega \sin \Theta = \sin \theta ;$$

cette dernière équation devient, en effet,

$$\omega' \operatorname{tang} \Theta' = \operatorname{tang} \theta' ,$$

en posant

$$\Theta' = \frac{\Theta + \theta}{2} , \quad \theta' = \frac{\Theta - \theta}{2} , \quad \omega' = \frac{1 - \omega}{1 + \omega} .$$

En résumé, *les équations arithmotrigonométriques*

$$\frac{\sin \Theta}{\sin \theta} = n ,$$

$$\frac{\sin \Theta}{\operatorname{tang} \theta} = n ,$$

$$\frac{\operatorname{tang} \Theta}{\operatorname{tang} \theta} = n ,$$

dans lesquelles n , $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$ et $\operatorname{tang} \frac{\Theta}{2}$ sont trois nombres rationnels dont le premier est imposé, sont respectivement équivalentes à trois équations eulériennes du type

$$x^4 + 2kx^2 + 1 = \square .$$

87. — Parmi les équations de cette espèce se trouve l'équation

$$x^4 + 14x^2 + 1 = \square$$

qui mérite une mention spéciale, car elle intervient dans l'étude du problème des arithmotriangles télémétriques.

Reprenons, en effet, l'équation trouvée au paragraphe 67 de la quartique plane dont l'étude arithmotrigonométrique est équivalente à l'étude des arithmotriangles télémétriques généraux :

$$(x^2 - y^2)(x^2 - 2y^2) = x^2 + 2y^2.$$

La condition de rationalité en x^2 de cette équation bicarrée en x est précisément exprimée par l'équation

$$y^4 + 14y^2 + 1 = \square ;$$

en l'écrivant sous la forme

$$(y^2 - 1)^2 + (4y)^2 = \square ,$$

et en posant $y = \text{tang } \frac{\Theta}{2}$, elle équivaut à l'équation arithmotrigonométrique

$$\text{tang } \theta = 2 \text{ tang } \Theta .$$

L'équation considérée admet des solutions banales évidentes : $y = 0, 1$ et $l'\infty$; elle n'admet pas d'autre solution rationnelle. L'impossibilité de cette équation particulière a été primitivement établie par L. EULER en 1780¹. Par suite,

Il n'existe aucun triangle télémétrique dont les trois côtés soient rationnels.

88. — Je profite de l'occasion qui m'est offerte pour indiquer une transformation intéressante de ce type d'équation. L. EULER considère l'équation particulière

$$x^4 + 14x^2 + 1 = \square ,$$

¹ Cette impossibilité de l'équation

$$x^4 + 14x^2 + 1 = \square$$

est établie à la fin de la pièce *De binis formulis speciei $x^2 + my^2$ et $x^2 + ny^2$ inter se concordibus et discordibus*, datée de 1780 [*Commentationes arithmeticae*, t. 2, pp. 406-413] et rappelée (p. 492) au début de celles des deux pièces du même titre : *De casibus quibus hanc formulam $x^4 + kx^2y^2 + y^4$ ad quadratum reducere licet* qui est datée de 1782 (t. 2, p. 492).

L'impossibilité de cette équation particulière est rappelée dans le travail déjà cité de A. Genocchi (*C. R.*, t. 78, p. 435).

en même temps que l'équation également impossible

$$x^4 - x^2 + 1 = \square ;$$

toutes deux se présentent, en effet, suivant l'ordre que l'on adopte dans l'étude du système des deux équations

$$x^2 + y^2 = \square \quad x^2 + 4y^2 = \square .$$

EULER établit l'impossibilité de toutes ces équations ainsi que de celles qui peuvent en être déduites par transformation : « Denique etiam formulæ biquadraticæ, quæ se obtulerunt, sunt impossibiles. Ita cum ex theoremate sit « $p^4 - p^2q^2 + q^4 = \square$ impossibilis, impossibilis quoque « erit hæc forma $p^4 + 14p^2q^2 + q^4 = \square$, hincque etiam « plures aliæ formulæ, quæ per transformationem hinc formari possunt. » Il ne semble point qu'il ait aperçu la possibilité de transformer l'une en l'autre par une transformation simple ces deux équations

$$x^4 + 14x^2 + 1 = \square , \quad x^4 - x^2 + 1 = \square .$$

Cette transformation n'est autre que la transformation homographique

$$x = \frac{1 - x'}{1 + x'} .$$

Soit généralement, en effet, une équation

$$x^4 + 2kx^2 + 1 = \square ;$$

la transformation ci-dessus lui fait correspondre l'équation

$$x^4 + 2k'x^2 + 1 = \square ,$$

et la correspondance est réciproque. Entre les nombres k et k' existe la correspondance involutive

$$(k + 1)(k' + 1) \mp 4 = 0 ;$$

tout particulièrement pour $k = +7$, on obtient $k' = -\frac{1}{2}$.

89. — ARITHMOTRIANGLES HÉRONIENS DONT LA SOMME DES CARRÉS DE DEUX COTÉS EST UN CARRÉ. — Il s'agit de rechercher tous les arithmotriangles héroniens, généralisant les

arithmotriangles pythagoriques, tels que la somme des carrés de deux côtés, b et c par exemple, soit un carré :

$$b^2 + c^2 = \square .$$

On a donc

$$\sin^2 B + \sin^2 C = \square .$$

c'est-à-dire encore

$$\left(\frac{1+y^2}{y}\right)^2 + \left(\frac{1+z^2}{z}\right)^2 = \square .$$

Cette dernière équation a été rencontrée par L. EULER¹ qui en a donné, en 1773, la solution

$$y = \frac{4t}{t^2 - 1} , \quad z = \frac{3t^2 + 1}{t(t^2 + 3)} ,$$

en fonction d'un paramètre rationnel t quelconque.

90. — Qu'il me soit permis, à ce sujet, de placer ici quelques observations sur les *Commentationes arithmeticae*.

Déjà en maintes occasions, j'ai mentionné le nom d'EULER parmi ceux des géomètres qui ont étudié certaines figures simples sous le point de vue arithmogéométrique. Les questions d'analyse indéterminée traitées dans les admirables *Commentationes arithmeticae*, dont la lecture est facile et captivante, sont de deux espèces. Les unes sont de nature géométrique : triangles héroniens, triangles à médianes rationnelles, triangles rectangles dont l'hypoténuse est un carré parfait ainsi que la somme des cathètes, parallélépipèdes rectangles dont les arêtes et les diagonales des faces sont commensurables, etc.

A côté de ces questions essentiellement arithmogéométriques, résolues totalement ou partiellement par des considérations purement arithmétiques, se placent des questions de pure analyse indéterminée, telles que l'étude de l'équation

$$x^4 + kx^2 + 1 = \square ,$$

dont il a été question ci-dessus (aux paragraphes 51 et 71 notamment). Rien dans l'œuvre d'EULER ne permet de détermi-

¹ *Commentationes arithmeticae*, *Miscellanea analytica*, 15 novembre 1773, tomus posterior, Petropoli, 1849, pp. 44-52. Le problème ci-dessus considéré est traité aux pp. 46-47.

ner l'origine de ces questions : les a-t-il considérées comme de simples généralisations de l'équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT

$$ax^2 + bx + c = \square ,$$

ou les a-t-il rencontrées à l'occasion d'études relatives à des problèmes géométriques du genre précédent, problèmes auxquels il n'a pas cru devoir faire allusion dans sa rédaction définitive ? Il semble difficile de solutionner cette question d'origine, car il insiste fréquemment sur le caractère analytique de ces recherches qui *constituent un prolongement de l'analyse diophantine*.

Il semble pourtant difficile d'attribuer une origine de ce genre à des équations telles que celle,

$$\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y^2 + 1}{y}\right)^2 = \square ,$$

de la pièce du 15 novembre 1773. Elle est peut-être née de l'étude d'une figure géométrique dont il ne reste pas trace dans le mémoire d'EULER. Il est fort possible que la généralisation des triangles pythagoriques dont je viens de rattacher l'étude à cette curieuse équation ait été envisagée par le même géomètre qui consacrait plusieurs mémoires aux équations

$$b^2 + c^2 - 2a^2 = \square$$

des arithmotriangles à médianes rationnelles (voir § 98) et aux équations

$$b^2 + c^2 - a^2 = \square , \text{ etc.}$$

(voir § 100) dont la liaison avec les précédentes est évidente. Il en est de même des équations du système

$$x^2 + y^2 = \square .$$

$$x^2 + 4y^2 = \square ,$$

dont il vient d'être question à propos des arithmotriangles téléométriques (voir § 88) et qui sont manifestement celles qui traduisent analytiquement le problème des arithmotriangles pythagoriques à deux médianes rationnelles (voir § 99).