Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1917)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Remarques sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise (Fibonacci),

Tout ce problème est ainsi ramené à la sommation de progressions géométriques.

On trouve facilement $\sum_{\lambda}^{0\ldots n} \lambda \cdot 2^{\lambda} = 2 + (n - 1) \cdot 2^{n+1}$.

On en déduit immédiatement $\sum_{\lambda}^{0\ldots n} (\lambda + 1) \cdot 2^{\lambda} = 1 + n \cdot 2^{n+1}$,

et ce résultat, combiné avec la décomposition (a) du nombre n des disques, conduit à la formule cherchée

$$T_n = 1 + (\lambda + r) \cdot 2^{\lambda+1}$$

L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel).

Remarques sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise (Fibonacci),

à propos d'un article de M. E. Turrière.

Il est intéressant de rapprocher les recherches publiées récemment par MM. Hæntzschel[1] et Turrière[2] sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise. Tandis que M. Turrière ne fait usage que de moyens élémentaires, M. Hæntzschel montre comment l'emploi des fonctions $\wp$ de Weierstrass facilite l'étude approfondie de ces problèmes arithmo-géométriques.

D'après le 7e exemple du 3e livre de l'Arithmétique de Diophante, il s'agit de trouver trois nombres en progression arithmétique $(a - d, a, a + d)$ et tels que la somme de deux des nombres soit chaque fois un carré parfait.

Diophante cherche d'abord trois nombres carrés qui sont en progression arithmétique

$$2a - d = r^2 , \qquad 2a = t^2 , \qquad 2a + d = w^2 ;$$

il trouve

$$41^2 - 720 = 31^2 , \qquad 41^2 , \qquad 41^2 + 720 = 49^2 .$$

---

[1] *Jahresbericht der D. M.-V.*, 24e année, 1915, p. 467-471, Lösung einer Aufgabe aus der Arithmetik des Diophante; 25e année, 1916, p. 139-145, Ueber eine Aufgabe aus der Arithmetik des Diophante.

[2] *L'Enseign. mathém.*, 17e année, 1915, p. 315-324, Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise.

Mais c'est la première question de Jean de Palerme à Léonard de Pise (Fibonacci) qui a donné la solution

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2 , \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 , \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2 .$$

Il est clair que

$$\left(\frac{w+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{w-r}{2}\right)^2 = t^2 ,$$

d'où il suit que $\frac{w-r}{2}$, $\frac{w+r}{2}$ et t sont des nombres rationnels de Pythagore.

M. Hæntzschel a démontré [*l. c.*, 24^e^ année, p. 468, (5) et p. 469, (7)-(11)] que l'expression générale de la série est :

$$2a - d = \wp(u) - e_3 = \frac{n^2}{4k^2}(2k^2 - 4k + 1)^2 = r^2 ;$$

$$2a = \wp(u) = \frac{n^2}{4k^2}(2k^2 - 2k + 1)^2 = t^2 ;$$

$$2a + d = \wp(u) - e_1 = \frac{n^2}{4k^2}(2k^2 - 1)^2 = w^2 ;$$

$$d = e_3 = - e_1 = \frac{n^2}{k}(2k^2 - 3k + 1) ,$$

où $\wp(u)$ est la fonction elliptique de Weierstrass. C'est la solution primitive selon Fermat. Voici la solution complète du problème de Jean de Palerme (*Jahresbericht,* 25^e^ année, p. 142), où δ est une valeur spéciale de la différence d.

$$\begin{array}{lll} \wp(u) - \delta , & \wp(u) , & \wp(u) + \delta ; \\ \wp(2u) - \delta , & \wp(2u) , & \wp(2u) + \delta ; \\ \wp(3u) - \delta , & \wp(3u) , & \wp(3u) + \delta ; \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \wp(nu) - \delta , & \wp(nu) , & \wp(nu) + \delta . \end{array}$$

$$\wp(2u) = \frac{n^2[(2k^2 - 2k + 1)^4 + 16k^2(2k^2 - 3k + 1)^2]^2}{16k^2(2k^2 - 1)^2(2k^2 - 2k + 1)^2(2k^2 - 4k + 1)^2} ;$$

$$\wp'(nu)^2 = 4\wp(nu)[\wp^2(nu) - d^2] ;$$

$$\wp(3u) = \wp(u) + \frac{\wp'(u) \cdot \wp'(2u)}{(\wp(2u) - \wp(u))^2} \qquad (l.\ c.,\ \text{p. } 470,\ 471,\ 143).$$

Exemples. A. $k=5$; $n=\frac{5}{6}$; d'où suit $2a=\left(\frac{41}{12}\right)^2$; $d=\delta=5$. (Léonard de Pise.)

a) $$\left(\frac{41}{12}\right)^2-5=\left(\frac{31}{12}\right)^2; \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2; \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2+5=\left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

b) $$\frac{3\,344\,161^2}{24^2.\,31^2.\,41^2.\,49^2}-5=\frac{113\,279^2}{24^2.\,31^2.\,41^2.\,49^2}; \quad \left(\frac{3\,344\,161}{24\,.\,31\,.\,41\,.\,49}\right)^2;$$

$$\left(\frac{3\,344\,161}{24\,.\,31\,.\,41\,.\,49}\right)^2+5=\left(\frac{4\,728\,001}{24\,.\,31\,.\,41\,.\,49}\right)^2. \qquad \text{etc.}$$

B. $k=-1$, $n=-2$; d'où il suit $2a=25$; $d=\delta=-24$ (*Jahresbericht,* 25e année, 1916, p. 142-145).

a) $$5^2-24=1^2; \quad 5^2; \quad 5^2+24=7^2.$$

b) $$\left(\frac{1201}{70}\right)^2-24=\left(\frac{1151}{70}\right)^2; \quad \left(\frac{1201}{70}\right)^2; \quad \left(\frac{1201}{70}\right)^2+24=\left(\frac{1249}{70}\right)^2.$$

c) $$\left(\frac{7\,776\,485}{1\,319\,901}\right)^2-24=\left(\frac{4\,319\,999}{1\,551.851}\right)^2; \quad \left(\frac{7\,776\,485}{1\,319\,901}\right)^2;$$

$$\left(\frac{7\,776\,485}{1\,319\,901}\right)^2+24=\left(\frac{10\,113\,607}{1\,551.851}\right)^2. \qquad \text{etc.}$$

Dans le travail de M. Turrière on aurait

$x^1=\wp(3u)$, voir p. 316, (3) et $x_2^1=\wp(2u)$, voir p. 320, (10).

(D'après une lettre de M. Hæntzschel. *La Réd.*)