Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1917)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES REPRÉSENTATIONS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Autor: Kienast, A.

Kapitel: II

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17319

grale représentée par la série convergente

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n + b_n \log x] x^n .$$

Les considérations faites se rapportent au cas le plus spécial du problème suivant : Déterminer le développement en série d'une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) x^i y^{(i)} = \sum_{k=0}^{m} x^{\alpha_k} [\varphi_{0k}(x) + \varphi_{1k}(x) \lg x + \ldots + \varphi_{\beta_k k}(x) (\lg x)^{\beta_k}] ,$$

$$p_i(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{i\lambda} x^{\lambda} ,$$

valable dans le voisinage du point singulier $x = 0$ pour lequel les intégrales de $P(y) = 0$ sont toutes régulières. On trouvera les résultats pour le cas général dans le mémoire cité plus haut.

De la même manière j'arrive dans ce mémoire à l'expression en série représentant asymptotiquement une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} x^{s(n-i)} . p_i(x) y^{(i)} = e^{\frac{\beta x^{t+1}}{t+1} + \frac{\beta_1 x^t}{t} + \ldots + \beta_t x} . x^{\sigma} \left[C_0 + \frac{C_1}{x} + \ldots \right] ,$$

$$p_i(x) = a_i + \frac{a_{i_1}}{x} + \frac{a_{i_2}}{x^2} + \ldots ; \qquad a_n \neq 0 ,$$

quand x grandit indéfiniment en étant positif.

II

On connaît plusieurs moyens pour former une intégrale définie représentant une solution particulière de (3). A ce but conduisent la méthode de la variation des constantes et un théorème de Cauchy, voir *Comptes Rendus*, T. 11, p. 2 (1840). Soit

$$\int_{x_0}^{x} W(x , t) dt$$

cette intégrale définie cherchée, il doit être possible de déterminer la constante C telle que l'équation subsiste

$$C y_1(x) + V(x) = \int_{x_0}^{x} W(x, t)\,dt .$$

Or dans le cas présent il est plus simple de la tirer des équations

$$xy' - xp(x)y = x^{\alpha} \cdot \varphi(x) ,$$

$$xy_1' - xp(x)y_1 = 0 ,$$

qui donnent

$$x[y_1 \cdot y' - y \cdot y_1'] = x^{\alpha} \cdot y_1 \cdot \varphi(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{y_1}\right] = \frac{x^{\alpha-1} \cdot \varphi(x)}{y_1(x)} ,$$

ou

$$\left|\frac{V(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \frac{x^{\alpha-1} \cdot \varphi(x)}{y_1(x)}\,dx ; \qquad (9)$$

car on a

$$\left|\frac{y(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} = \left|\frac{C y_1(x) + V(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} = \left|\frac{V(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} .$$

C'est la formule principale et, comme l'équation différentielle (3) joue un rôle fondamental, je l'appelle *équation différentielle de liaison.*

Dans le mémoire plusieurs fois cité je fais la démonstration d'une formule analogue pour le cas général d'une équation différentielle de liaison de $n^{\text{ième}}$ ordre.

Connaissant la forme analytique des fonctions V, y_1, φ il s'ensuit :

Théorème : Les deux membres de (9) convergent pour $\lim x_0 = 0$, si $R(\alpha) > 0$, $R(\alpha)$ désignant la partie réelle de la quantité α.