Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1917)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES REPRÉSENTATIONS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Autor: Kienast, A.

Kapitel: I

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17319

FK(x). En désignant le cercle de convergence de la série (1) par C, l'expression

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu\,!} \mathrm{F}^{(\mu)}(a)\,(x-a)^{\mu}$$

donne la représentation analytique de FC(x). Cette expression est composée des éléments (2) et des nombres rationnels $\frac{1}{\mu\,!}$ indépendants du choix des dits éléments.

Le problème dont je vais m'occuper consiste à construire des expressions arithmétiques formées au moyen des constantes (2) valables dans une étoile de convergence K de centre a et circonscrite au cercle C. MM. Mittag-Leffler et Borel en ont publié des solutions des plus importantes, M. Mittag-Leffler demandant une représentation valable et gardant sa forme dans tout le domaine de la branche uniforme d'une fonction monogène.

Laissant de côté de telles conditions supplémentaires, les considérations suivantes contiennent la démonstration dans le cas le plus spécial[1] d'une méthode qui permet d'obtenir une infinité de formules à l'aide desquelles on peut transformer une expression limite[2] dans une autre. Le reste de la note sera consacré aux applications.

I

L'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire

$$x\frac{dy}{dx} - xp(x)y = x^{\alpha}\varphi(x)\,, \tag{3}$$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\,,$$

$$x^{\alpha}\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{D}_m x^{m+\alpha}\,,$$

[1] La démonstration pour tous les cas aujourd'hui accessibles est développée dans un mémoire : « Ueber eine Integralformel und die Eigenschaften der darin vorkommenden Funktionen », *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 61. Jahrgang 1916, drittes und viertes Heft.

[2] G. Mittag-Leffler, *Sur la représentation*, etc., *Acta Math.*, t. 24, p. 184, la note.

où $p(x)$ et $\varphi(x)$ sont supposés des séries de Taylor à rayon de convergence non nul, se compose d'une intégrale particulière $V(x)$ de (3) et de l'intégrale générale

$$y_1(x) = e^{\int\limits_0^x p(\xi)\,d\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} E(k)\,x^k \tag{4}$$

de l'équation sans second membre

$$xy_1'(x) - x\,p(x)\,y_1(x) = 0\ , \tag{5}$$

c'est-à-dire

$$y(x) = y_1(x) + V(x)\ .$$

On peut arriver à la représentation d'une intégrale particulière de deux manières.

La différentiation de (3) donne

$$y'' - p(x)y' - p'(x)y = x^{\alpha-2}[x\,.\,\varphi'(x) + (\alpha-1)\varphi(x)] = x^{\alpha-2}\,.\,\varphi_1(x)\ ,$$

d'où

$$x^2\,.\,\varphi(x)\,y'' - [xp(x)\varphi(x) + \varphi_1(x)]xy' - x[xp'(x)\varphi(x) - p(x)\varphi_1(x)]y = 0\ . \tag{6}$$

L'équation déterminante de cette équation différentielle

$$\varphi(0)\gamma(\gamma-1) - \varphi_1(0)\gamma = \gamma\,.\,\varphi(0)[\gamma - 1 - (\alpha-1)] = 0$$

possède comme racine 0 et α. Par conséquent (6) admet un système fondamental d'intégrales $z_1 z_2$ dont on connaît la forme analytique dans le voisinage de $x = 0$.

Chaque intégrale de (3) doit être intégrale de (6); mais la réciproque n'est pas vraie. Donc il est toujours possible de déterminer les constantes D telles qu'on ait

$$y_1(x) = D_1\,z_1(x) + D_2\,z_2(x)\ , \tag{7}$$

$$V(x) = D_1'\,z_1(x) + D_2'\,z_2(x)\ . \tag{8}$$

Il faut distinguer *trois cas :*

Premier cas : Supposons que α ne soit pas un entier. Le système fondamental de (6) est de la forme

$$z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\,x^n\ , \qquad z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,x^{n+\alpha}\ .$$

De l'équation (7) résulte à cause des expressions pour y_1, z_1, z_2 valables dans le voisinage de $x = 0$

$$D_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad y_1(x) = D_1 z_1(x) \ .$$

Par suite l'équation (8) s'écrit

$$V(x) = \frac{D_1'}{D_1} y_1(x) + D_2 z_2(x) \ ,$$

mais si V est intégrale particulière de (3)

$$V - \frac{D_1'}{D_1} y_1(x)$$

en est une autre. Donc on est conduit au

THÉORÈME : L'équation différentielle (3) admet une intégrale complètement déterminée par la propriété d'être, dans le voisinage de $x = 0$, développable en la série convergente

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} \ , \qquad A_0 \neq 0 \ .$$

Inversement :

THÉORÈME : Si la fonction y est donnée par la série convergente

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} \ ; \qquad A_0 \neq 0 \ ,$$

l'expression (3)

$$P(y) = x\frac{dy}{dx} - xp(x)y$$

est égale à la série convergente

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_m x^{m+\alpha} \ ; \qquad D_0 \neq 0 \ .$$

Second cas : Soit α un entier positif. Un système fondamental pour (6) est

$$z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} \ , \qquad z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [e_n + d_n \log x] x^n \ ,$$

et, certaines conditions étant remplies, la seconde intégrale z_2 ne contient pas de logarithme.

Si dans le développement de z_2 le terme logarithmique ne manquait pas, on conclurait de l'équation (7) $D_2 = 0$, et puisque l'égalité entre les deux membres restant est impossible, le développement de z_2 ne renferme pas de logarithme

$$z_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n .$$

Par suite l'équation (8)

$$V(x) = D_1' \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} + D_2' \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

conduit au

Théorème : L'équation différentielle (3) admet une intégrale complètement déterminée par la propriété d'être, dans le voisinage de $x = 0$, développable en la série convergente

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k ; \qquad B_0 \neq 0 ,$$

et inversement.

Maintenant l'équation (7) pour la valeur $x = 0$ montre que le coefficient de z_2 ne peut pas disparaître. Introduisant

$$z_2 = \frac{1}{D_2} y_1(x) - \frac{D_1}{D_2} z_1(x)$$

dans (8) on aura

$$V(x) = \frac{D_2'}{D_2} y_1(x) + \frac{D_1' D_2 - D_1 D_2'}{D_2} z_1(x) ,$$

et l'on est amené au même théorème trouvé dans le premier cas. Cette substitution est seulement impossible si (8) ne renferme pas z_2 ; mais dans ce cas (8) prouve le théorème.

Troisième cas : Supposons α nul ou entier négatif. Le système fondamental de (6) est

$$z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n , \qquad z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [B_n + C_n \log x] x^n ,$$

et de (8) on tire le

Théorème : L'équation différentielle (3) admet une intégrale représentée par la série convergente

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n + b_n \log x] x^n .$$

Les considérations faites se rapportent au cas le plus spécial du problème suivant : Déterminer le développement en série d'une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) x^i y^{(i)} = \sum_{k=0}^{m} x^{\alpha_k} [\varphi_{0k}(x) + \varphi_{1k}(x) \lg x + \ldots + \varphi_{\beta_k k}(x) (\lg x)^{\beta_k}] ,$$

$$p_i(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{i\lambda} x^{\lambda} ,$$

valable dans le voisinage du point singulier $x = 0$ pour lequel les intégrales de $P(y) = 0$ sont toutes régulières. On trouvera les résultats pour le cas général dans le mémoire cité plus haut.

De la même manière j'arrive dans ce mémoire à l'expression en série représentant asymptotiquement une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} x^{s(n-i)} . p_i(x) y^{(i)} = e^{\frac{\beta x^{t+1}}{t+1} + \frac{\beta_1 x^t}{t} + \ldots + \beta_t x} . x^{\sigma} \left[C_0 + \frac{C_1}{x} + \ldots \right] ,$$

$$p_i(x) = a_i + \frac{a_{i_1}}{x} + \frac{a_{i_2}}{x^2} + \ldots ; \qquad a_n \neq 0 ,$$

quand x grandit indéfiniment en étant positif.

II

On connaît plusieurs moyens pour former une intégrale définie représentant une solution particulière de (3). A ce but conduisent la méthode de la variation des constantes et un théorème de Cauchy, voir *Comptes Rendus,* T. 11, p. 2 (1840). Soit

$$\int_{x_0}^{x} W(x , t) dt$$