Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1917)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE QUESTION DE CAYLEY RELATIVE AU PROBLÈME DES TRIADES DE STEINER

Autor: Bays, Severin

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17317

UNE QUESTION DE CAYLEY
RELATIVE AU PROBLÈME DES TRIADES DE STEINER

PAR

Severin BAYS (Fribourg).

---

1. — Le problème des *triples* ou *triades* de STEINER est bien connu :

Pour quel nombre d'éléments N *peut-on trouver un système de triples (combinaisons 3 à 3) contenant* UNE FOIS *et* UNE SEULE FOIS *chaque couple de ces éléments? Pour un* N *donné, combien y a-t-il de systèmes* DIFFÉRENTS, *c'est-à-dire de systèmes ne pouvant provenir l'un de l'autre par une permutation quelconque des* N *éléments?*

On trouve immédiatement que les formes nécessaires pour N sont $6n + 1$ et $6n + 3$. REISS, MOORE, FITTING ont établi[1] que ces deux formes sont suffisantes, c'est-à-dire qu'il existe des systèmes de triples pour chaque N de la forme $6n + 1$ ou $6n + 3$. NETTO, HEFFTER, WHITE, et d'autres ont donné[2] des constructions particulières, et les groupes de substitutions de nombre de ces systèmes; mais le problème général de la détermination du nombre de systèmes differents pour chaque $N = 6n + 1$ ou $6n + 3$ est encore à l'heure actuelle loin d'être résolu.

A part le cas trivial $N = 3$, où le système est formé d'un seul triple 123, les deux cas immédiats sont $N = 7$ et $N = 9$. Le nombre des triples du système pour contenir une fois exactement chaque couple doit être $\frac{N(N-1)}{6}$; un élément quelconque pour être ac-

---

[1] REISS. *Journal f. Mathem.*, 56 (1859) p 326. — MOORE. *Mathem. Ann.*, 43 (1893), p. 271. FITTING. *Nieuw Archief. voor wiskunde Mitgegwen door. het Wiskundig Genootschap te Amsterdam* (2), 9 (1911), p. 359.

[2] NETTO. *Lehrbuch der Combinatorik*, 1901, p. 202. — HEFFTER. *Mathem. Ann.*, 49 (1897), p. 101. — WHITE. *Transactions of the American Mathem. Society*, vol. 14 (1), 1913, p. 7; vol. 16 (1), 1915, p. 13. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. I (1-8), 1915. — L.-D. CUMMINGS. *Transactions of the American Math. Society*, vol. 15 (3), 1914, p. 311.

couplé à chacun des $N - 1$ autres éléments, doit entrer dans $\frac{N-1}{2}$ triples, et les trois éléments d'un même triple ne doivent plus se retrouver ensemble. Pour les sept éléments 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, on voit ainsi que les seuls systèmes possibles commençant par le triple 123, sont les six suivants :

123	145	167	246	257	347	356
123	145	167	247	256	346	357
123	146	157	247	256	345	367
123	146	157	245	267	347	356
123	147	156	245	267	346	357
123	147	156	246	257	345	367

De la même manière on construit les seuls six systèmes possibles commençant par le triple 124 ; ils viennent d'ailleurs des précédents en permutant les éléments 3 et 4 :

124	135	167	236	257	437	456
124	135	167	237	256	436	457
124	136	157	237	256	435	467
124	136	157	235	267	437	456
124	137	156	235	267	436	457
124	137	156	236	257	435	467

Les systèmes de triples de sept éléments ne peuvent commencer que par les triples 123, 124, 125, 126, 127 ; ce qui donne uniquement 30 systèmes possibles, provenant d'ailleurs tous les uns des autres par des permutations d'éléments, par conséquent un *seul* système avec un groupe de substitutions qui le transforme en lui-même d'ordre $\frac{7\,!}{30} = 168$.

2. — Dans ses *Mathematical Papers I* (page 481, 1850), CAYLEY, à qui Jacob STEINER a dû poser le problème avant d'en donner l'énoncé général deux ans plus tard dans le *Journal of Math.* (1853, p. 181), fait d'abord la remarque qu'il est impossible de répartir les 35 triples de sept éléments en cinq systèmes de Steiner. En effet, dans les douze systèmes plus haut, on en trouve aisément deux différents par tous leurs triples, mais dans chaque cas il est déjà impossible d'en trouver un troisième commençant par 125 et n'ayant aucun triple commun avec ces deux premiers [1]. Puis Cayley revient à la même question à la fin de son article et donne pour 15 éléments une démonstration simple et intéressante,

[1] NETTO, *Combinatorik*. p. 228.

surtout par l'idée avec laquelle il conclut; je me permets de rapporter cette démonstration avec ses propres termes :

« Supposons que les 455 triades de 15 lettres puissent être disposées en 13 systèmes de 35 triades chacun, contenant chacun chaque dyade possible ; il paraît naturel de se demander si ces 13 systèmes ne peuvent pas s'obtenir de l'un quelconque d'entre eux par une permutation cyclique de 13 de ces lettres. Je pense que cela est impossible. Soient $a, b, c, \ldots, l, m$, les 13 lettres soumises à la permutation cyclique. Considérons à part les triades qui contiennent l'une ou l'autre des deux dernières lettres n et o qui restent inchangées ; aucune de ces triades ne contient la lettre, quelle qu'elle soit, qui forme une triade avec la dyade no. En y barrant ces lettres n et o, il reste ainsi dans chaque système deux séries de 6 dyades chacune et composées des mêmes 12 lettres. Et chacune de ces deux séries de dyades doit, par la transformation cyclique en question, reproduire le système complet des 78 dyades de 13 lettres. Si on arrange les dyades de 13 lettres de la manière suivante :

ab	*bc*	*cd*	*de*	*ef*	*fg*	*gh*	*hi*	*ij*	*jk*	*kl*	*lm*	*ma*
ac	*bd*	*ce*	*df*	*eg*	*fh*	*gi*	*hj*	*ik*	*jl*	*km*	*la*	*mb*
ad	*be*	*cf*	*dg*	*eh*	*fi*	*gj*	*hk*	*il*	*jm*	*ka*	*lb*	*mc*
ae	*bf*	*cg*	*dh*	*ei*	*f*	*gk*	*hl*	*im*	*ja*	*kb*	*lc*	*md*
af	*bg*	*ch*	*di*	*ej*	*fk*	*gl*	*hm*	*ia*	*jb*	*kc*	*ld*	*me*
ag	*bh*	*ci*	*dj*	*ek*	*fl*	*gm*	*ha*	*ib*	*jc*	*kd*	*le*	*mf*,

il résulte que les 6 dyades de chaque série doivent être situées une dyade dans chaque ligne. Supposons les deux séries de dyades formées des 12 lettres $a, b, c, \ldots\ldots, l$; on ne trouve point dans l'arrangement écrit d'autre série de 6 dyades de ces 12 lettres, ayant une dyade dans chaque ligne, que la seule suivante : *al, bk, cj, di, eh, fg;* et comme il en est de même pour toute autre combinaison de 12 lettres tirées des 13 lettres $a, b, c, \ldots l, m$, la dérivation des 13 systèmes de 35 triades au moyen d'une permutation cyclique de 13 lettres, est impossible. »

« Et il ne paraît pas y avoir aucune règle pour faire dériver les 13 systèmes de l'un d'eux ; il n'y a même pas de raisons pour croire que les 13 systèmes existent réellement, car on a déjà démontré que de tels systèmes n'existent pas pour le cas de 7 éléments. »

3. — Cependant déjà pour 9 éléments, la question de Cayley, impossible pour 7 éléments, a une solution affirmative et même deux solutions différentes. Avant de donner ces solutions, la propriété suivante nous fournit d'une manière simple et nouvelle tout ce qu'il est nécessaire de rappeler sur le système de Steiner de

9 éléments[1] et permet surtout d'obtenir immédiatement des solutions à la question de Cayley[2].

THÉORÈME. — *Si le triple* abc *n'entre pas dans un système de Steiner de 9 éléments, le triple* $\alpha\,\beta\,\gamma$ *des trois éléments associés dans le système aux couples* bc, ac, ab :

$$bc\alpha, \quad ca\beta, \quad ab\gamma$$

n'y entre pas non plus. En effet, dans le cas contraire le système comprend déjà les 4 triples $bc\alpha$, $ca\beta$, $ab\gamma$, $\alpha\beta\gamma$, et n'en garde plus que 8 disponibles. Les 3 éléments restants α', β', γ' doivent entrer chacun dans 4 triples ; ou bien ils forment le triple $\alpha'\beta'\gamma'$, et alors ils ne peuvent plus entrer ensemble et il faudrait encore $3 \times 3 = 9$ triples disponibles en plus du triple $\alpha'\beta'\gamma'$; ou bien ils forment les 3 couples $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$, et alors chacun doit encore entrer 2 fois séparément, et il faudrait encore $3 \times 2 = 6$ triples disponibles, ce qui n'est pas non plus. Le triple $\alpha\beta\gamma$ n'est donc pas un triple du système ; par la même raison le triple $\alpha'\beta'\gamma'$ des 3 éléments associés aux couples $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, ne le sera pas non plus. On voit ainsi que le système de Steiner est complètement déterminé par l'arrangement $\alpha\,\beta\,\gamma$ pris dans les 6 éléments restant après a, b, c, et la permutation $\alpha'\beta'\gamma'$ des 3 derniers éléments et qu'il ne peut avoir que la forme suivante :

$$\begin{array}{lll} bc.\alpha & ca.\beta & ab.\gamma \\ \beta\gamma.\alpha' & \gamma\alpha.\beta' & \alpha\beta.\gamma' \\ \beta'\gamma'.a & \gamma'\alpha'.b & \alpha'\beta'.c \\ a\alpha\alpha' & b\beta\beta' & c\gamma\gamma' \end{array} \qquad \mathrm{S}$$

La place des a, b, c dans la troisième ligne est en effet déterminée par l'arrangement $\alpha\beta\gamma$ et la permutation $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$; α, β, γ ne

---

[1] NETTO, *Combinatorik*, p. 219 et 230.

[2] Je n'ai pu trouver aucune allusion à cette question de Cayley dans les travaux parus jusqu'ici sur le problème des triades de Steiner. Netto est le seul, dans sa *Combinatorik*, p. 228, à rappeler cette question ; il ne parle d'ailleurs que du cas de 7 éléments pour montrer que dans ce cas la question est insoluble. Je croyais être le premier à avoir obtenu une solution pour 9 éléments, lorsque j'ai trouvé dans les *Récréations mathématiques* de LUCAS, t. II, 1883, p. 193, un problème de M. WALECKI qui établit précisément une solution pareille. M. Walecki représente un système de Steiner de 9 éléments par le schéma :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{P} & a & b \\ c & d & \mathrm{Q} \\ e & f & g \end{vmatrix}$$

où les triples sont formés par les six lignes et colonnes, et les 6 diagonales complétées en écrivant une seconde fois le schéma à côté du premier ; et en permutant cycliquement $(abcdefg)$, il montre qu'il obtient ainsi les 84 triples des 9 éléments répartis en 7 tableaux, tels que l'on rencontre dans chaque tableau chacune des 9 lettres une fois et une seule fois avec les 8 autres. M. Walecki se borne d'ailleurs à établir cette répartition et ne fait aucune allusion à la question de Cayley.

peuvent entrer dans la troisième ligne; la première et la deuxième ligne montrent que α n'est plus à lier qu'avec a et α', β avec b et β', γ avec c et γ'. Il nous faut donc encore les triples $a\alpha\alpha'$, $b\beta\beta'$, $c\gamma\gamma'$, qui exigent que la troisième ligne laisse disponibles les couples $a\alpha'$, $b\beta'$, $c\gamma'$, et qu'elle soit donc $\beta'\gamma'a$, $\gamma'\alpha'b$, $\alpha'\beta'c$.

Le nombre des systèmes de 9 éléments dans lesquels n'entre pas le triple abc est ainsi, puisque $\alpha\ \beta\ \gamma$ peut être tous les arrangements de 6 éléments 3 à 3 et chaque fois $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ toutes les permutations de 3 éléments :

$$n = 6\ .\ 5\ .\ 4\ .\ 6 = 720 \text{ systèmes}$$

Les 720 systèmes contiennent les triples abd, abe, ... abi; le triple abc appartient donc aussi à 120 systèmes pareils et le nombre total des systèmes de 9 éléments est $720 + 120 = 840$ systèmes. D'autre part, par la manière même de les construire, tous ces systèmes proviennent les uns des autres par des permutations d'éléments ; ils ne représentent donc *qu'un seul* système de Steiner de 9 éléments avec un groupe de substitutions qui le transforme en lui-même d'ordre $\frac{9!}{840} = 432$.

Avec cela le système S peut s'écrire relativement au triple abc, d'une manière symbolique mais très courte, et qui le détermine complètement :

$$\alpha\ \beta\ \gamma\ ;\ \alpha'\ \beta'\ \gamma'$$

et sous cette forme ce n'est plus qu'un jeu d'écrire maintenant 6 systèmes pareils ne contenant pas le triple abc et différents entre eux par tous les triples. Ainsi par exemple les 6 systèmes :

$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha'\ \beta'\ \gamma'$		$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha'\ \beta'\ \gamma'$
$\beta\ \gamma\ \alpha$	$\gamma'\ \alpha'\ \beta'$		$\beta\ \gamma\ \alpha$	$\gamma'\ \alpha'\ \beta'$
$\gamma\ \alpha\ \beta$	$\beta'\ \gamma'\ \alpha'$		$\gamma\ \alpha\ \beta$	$\beta'\ \gamma'\ \alpha'$
$\alpha'\ \beta'\ \gamma'$	$\beta\ \gamma\ \alpha$	ou cette variante	$\alpha'\ \beta'\ \gamma'$	$\gamma\ \alpha\ \beta$
$\beta'\ \gamma'\ \alpha'$	$\alpha\ \beta\ \gamma$		$\beta'\ \gamma'\ \alpha'$	$\beta\ \gamma\ \alpha$
$\gamma'\ \alpha'\ \beta'$	$\gamma\ \alpha\ \beta$		$\gamma'\ \alpha'\ \beta'$	$\alpha\ \beta\ \gamma$

Les six systèmes absorbent ainsi 72 triples, contenant chaque couple exactement 6 fois ; les 12 triples restants doivent encore contenir une fois chaque couple, et forment aussi d'eux-mêmes un système de Steiner. On a ainsi autant de solutions à la question de Cayley : Répartir les 84 triples de 9 éléments en 7 systèmes de 12 triples, chaque système contenant une fois chaque couple.

4. — Reprenons les éléments 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Une première solution à la question de Cayley est :

123	147	158	169	248	259	267	349	357	368	456	789	
124	136	157	189	239	256	278	347	358	468	459	679	
125	137	149	168	238	246	279	345	369	478	567	589	
126	139	145	178	235	247	289	348	367	469	568	579	(I)
127	138	146	159	234	258	269	379	356	457	489	678	
128	134	156	179	236	249	257	359	378	458	467	689	
129	135	148	167	237	245	268	346	389	479	569	578	

Par commodité désignons chaque système par son premier triple. Les 3 couples d'un même triple du système 123 sont séparés dans les 6 autres systèmes, et les 3 éléments qui leur sont associés dans chaque système constituent un triple. Ecrivons au-dessous de chaque triple du système 123 les 6 triples qui ainsi lui correspondent, mais en les plaçant chacun dans la ligne du système de Steiner auquel il appartient. On obtient le tableau suivant :

3	*123*	*147*	*178*	*169*	*248*	*259*	*267*	*349*	*357*	*368*	*456*	*789*
4	468	256	239-347			347	459-189	278		157	189-239	136
5	478	369	246			168	589-345	168-125		279	137	125-345
6	469-579	235		348	367	178			469-289	145	289-178	126
7		258	379-269	234	379-159	146	138	678	146-269	457		
8		689	467	378-257	359-156	378	134	257-156	128	249		
9	578-569	389		245-578	167	346			148	129	237	245-346

Une substitution quelconque du groupe symétrique des 9 éléments transforme le système total I en système I′ équivalent, le système 123 en un système $12x$ équivalent, et ce tableau, dont la construction naturellement subsiste telle quelle, en le tableau équivalent correspondant au système $12x$ dans le système I′. Une substitution qui transforme à la fois le système I en lui-même et le système 123 en lui-même, doit transformer *le tableau en lui-même*, une ligne horizontale en une ligne horizontale, une colonne verticale en une colonne verticale. Ces dernières substitutions forment évidemment un groupe ; c'est ce groupe que nous voulons obtenir.

Les colonnes 147, 259, 368, qui doivent permuter entre elles, n'ont pas la même constitution :

Dans les colonnes :	*147*		*259*		*368*	
les couples entrent :	25	3 fois	34	2 fois	29	3 fois
	39	2 fois	37		15	2 fois
	69		16		45	
	89		18		75	
			78			
			46			
	et 9 autres couples 1 fois chacun.		et 6 autres couples 1 fois chacun.		et 9 autres couples 1 fois chacun.	

Ainsi l'élément 2 peut seulement devenir 2, 5, ou 9. Pour $2 = 2$ on a les cas :

$2 = 2 \quad 5 = 5 \quad 9 = 9$	$2 = 2 \quad 5 = 9 \quad 9 = 5$
1 peut devenir 1, 4, 7	1 peut devenir 3, 6, 8

Dans chaque cas les couples associés dans le système 123

à 2)	13	48	67	perm. entre eux	13	48	67	perm. entre eux.
à 5)	18	37	46	» » »	18	37	46	une ligne permute avec l'autre.
à 9)	16	34	78	» » »	16	34	78	

On obtient immédiatement les 6 premières puissances de la substitution :

$$s = (59)(164378)$$

Les cas $2 = 5$ et $2 = 9$ ne donnent rien ; le sous-groupe cherché est donc le groupe $\{s\}$[1] d'ordre 6. En prenant ensuite avec le tableau du système 123 le même tableau correspondant au système 124, on trouve la substitution :

$$\sigma = (1673824)$$

qui transforme le système I en lui-même en changeant le système 123 dans le système 124, et dont les 5 autres puissances

[1] Notation de Netto, Gruppen u. Substitutionentheorie, 1904, p. 34.

différentes de l'identité changent le système 123 en les 5 autres systèmes 125,..., 129. Le groupe total qui transforme la solution I en elle-même est donc le groupe $\{s, \sigma\}$ d'ordre 42.

5. — Une seconde solution à la question de Cayley est la suivante :

123	147	158	169	248	259	267	349	357	368	456	789	
124	139	157	168	236	258	279	345	378	467	489	569	
125	136	149	178	237	246	289	348	359	457	568	679	
126	137	148	159	239	245	278	346	358	479	567	689	(II)
127	135	146	189	238	249	256	347	369	458	579	678	
128	134	156	179	235	247	269	367	389	459	468	578	
129	138	145	167	234	257	268	356	379	469	478	589	

En effet le tableau correspondant au système 123 (je donne les systèmes I et II représentant les deux solutions avec le même système 123) dénote à première vue un groupe d'ordre plus élevé :

	123	*147*	*169*	*248*	*259*	*357*	*368*	*456*	*789*
4	489	236	258	157	467	168	279	139	345
5	679	568	348	359	178	149	125	237	246
6	567	239	358	159	346	148	479	278	126
7	458	256	347	369	678	249	127	189	135
8	578	389	247	367	134	269	459	128	156
9	469	589	257	167	138	268	145	379	234

158	267	349	
267 349	349 158	158 267	appart. au système 123.

Mais ici le système 123 est le seul dont le tableau ait cette forme. Le tableau pour les six autres systèmes prend une forme différente, et il n'y a ainsi aucune substitution qui transforme la solution II en elle-même en changeant le système 123 en un autre. Dans ce tableau du système 123, les colonnes 158, 267, 349, doivent permuter entre elles ; il ne reste qu'à prendre successivement $1 = 1, 5, 8, 2, 6, 7, 3, 4, 9$. Ainsi pour $1 = 1$ on a les deux possibilités :

$$1 = 1 \quad 5 = 5 \quad 8 = 8 \qquad\qquad 1 = 1 \quad 5 = 8 \quad 8 = 5$$

Les couples associés à ces éléments dans le système 123 :

23	47	69	permutent entre eux.		23	47	69	permutent entre eux.
29	37	46	» » »		29	37	46	une ligne permute avec
24	36	79	» » »		24	36	79	l'autre.

et par un essai sur le tableau on contrôle si la substitution obtenue est à prendre ou à rejeter. On trouve 54 substitutions ; c'est-à-dire la moitié des substitutions qui transforment le système 123 en lui-même en permutant les triples 158, 267, 349, entre eux, transforment le tableau en lui-même. 34 de ces substitutions sont les puissances de substitutions de la forme :

$$s = (58)\,(246379)$$

et les 20 autres sont de la forme :

$$\alpha = (158)\,(267)\,(349)\,, \quad \beta = (123)\,(456)\,(798), \text{ etc.}$$

Les substitutions α et β sont permutables et donnent un groupe G d'ordre 9. La substitution s est permutable avec ce groupe G et la plus petite puissance de s égale à une substitution de G est $s^6 = 1$. Le groupe qui transforme le système II en lui-même est donc *le groupe* $\{\alpha, \beta, s\}$ *d'ordre 54*.

On arrive plus vite au résultat avec le tableau du système 124 ; il donne immédiatement un sous-groupe d'ordre 9 de la forme de G, et le groupe cherché est ainsi d'ordre $6 \times 9 = 54$.

Les deux solutions données représentent ainsi $\frac{9\,!}{42} + \frac{9\,!}{54} = 15360$ répartitions possibles des 84 triples de 9 éléments en 7 systèmes de Steiner. Or, le travail n'est pas démesurément long, si on écrit les 840 systèmes de 9 éléments, on trouve que pour l'un des systèmes 123, par exemple pour le système :

123 147 158 169 248 259 267 349 357 368 456 789

il y a 32 systèmes 124 qui en diffèrent par tous les triples, et que chacun de ces systèmes 124 accouplé au système 123 donne, avec les systèmes 125,..., 129, n'ayant aucun triple commun avec eux, exactement 4 solutions cherchées; ce qui fait $32 \times 4 \times 120 = 15360$ solutions. Les systèmes I et II donnés sont donc les seules solutions *différentes* à la question de Cayley pour 9 éléments.

6. — Supposons que les $\nu(\nu-1)(\nu-2)/6$ triples de ν éléments $1, 2, \ldots \nu$ soient répartis en $\nu - 2$ systèmes de Steiner Δ_ν. Il y a un procédé donné par Reiss et généralisé depuis pour construire un système de triples $\Delta_{2\nu+1}$ au moyen d'un système de triples Δ_ν. On prend comme première partie du système $\Delta_{2\nu+1}$ le système donné Δ_ν; on répartit les $(\nu+1)\nu/2$ couples des $\nu+1$ nouveaux éléments en ν colonnes de $(\nu+1)/2$ couples, mais de telle sorte que chaque colonne contienne les $\nu+1$ éléments, et on écrit respectivement devant les couples de chaque colonne les anciens éléments $1, 2, 3, \ldots \nu$. On se rend compte immédiatement que l'ensemble des :

$$\frac{\nu(\nu-1)}{6} + \frac{(\nu+1)\nu}{2} = \frac{(2\nu+1)2\nu}{6}$$

triples ainsi obtenus contient en effet chaque couple des $2\nu+1$ éléments en question. Reiss fait la répartition des $(\nu+1)\nu/2$ couples des nouveaux éléments de la manière suivante; pour fixer les idées nous prenons le cas des 19 éléments $1, 2, \ldots, 9; 0, 1', 2', \ldots, 9'$; il est facile de comprendre cette disposition des 45 couples des éléments $0, 1', 2', \ldots, 9'$, et de l'appliquer au cas général:

0 1′	0 2′	0 3′	0 4′	0 5′	0 6′	0 7′	0 8′	0 9′	
2′8′	1′9′	1′2′	1′3′	1′4′	1′5′	1′6′	1′7′	1′8′	
3′7′	3′8′	4′8′	2′9′	2′3′	2′4′	2′5′	2′6′	2′7′	(A)
4′6′	4′7′	5′7′	5′8′	6′8′	3′9′	3′4′	3′5′	3′6′	
5′9′	5′6′	6′9′	6′7′	7′9′	7′8′	8′9′	4′9′	4′5′	

Nous écrivons une première fois devant les couples de chaque colonne celui des éléments $1, 2, \ldots, \nu$ correspondant au rang de la colonne; puis nous permutons cycliquement les éléments $1, 2, \ldots \nu$, jusqu'à ce que chacun ait été placé devant chaque colonne; les ν ensembles de $(\nu+1)\nu/2$ triples ainsi obtenus n'auront nulle part 2 triples communs. Si nous complétons $\nu-2$ de ces ensembles par les Δ_ν donnés au début, nous aurons ainsi $\nu-2$ systèmes de Steiner $\Delta_{2\nu+1}$ différents par tous les triples. En formant ensuite le tableau précédent avec les éléments $0, 1, 2, \ldots \nu = 9$, et plaçant devant les colonnes les éléments $1', 2', 3', \ldots, \nu'$, avec les $\nu-2$ systèmes $\Delta_{\nu'}$ pareils aux systèmes Δ_ν nous aurons de même $\nu-2$ systèmes $\Delta_{2\nu+1}$ différents par tous les triples. Il est facile de voir maintenant qu'avec les $\nu-2$ premiers systèmes $\Delta_{2\nu+1}$ trouvés, il est possible d'en associer exactement 2 des derniers obtenus (à moins que $\nu - 2 = 1$, c'est-à-dire $\nu = 3$ et $2\nu + 1 = 7$, et c'est la seule exception[1]) sans avoir encore un seul triple commun, et réciproquement. Ainsi pour 19 éléments, en écrivant seulement, pour la seconde partie de chaque système, le premier triple de chaque colonne :

1 01′	2 02′	3 03′	4 04′	5 05′	6 06′	7 07′	8 08′	9 09′
2 01′	3 02′	4 03′	5 04′	6 05′	7 06′	8 07′	9 08′	1 09′
3 01′	4 02′	5 03′	6 04′	7 05′	8 06′	9 07′	1 08′	2 09′
4 01′	5 02′	6 03′	7 04′	8 05′	9 06′	1 07′	2 08′	3 09′
5 01′	6 02′	7 03′	8 04′	9 05′	1 06′	2 07′	3 08′	4 09′
6 01′	7 02′	8 03′	9 04′	1 05′	2 06′	3 07′	4 08′	5 09′
7 01′	8 02′	9 03′	1 04′	2 05′	3 06′	4 07′	5 08′	6 09′
2′01	3′02	4′03	5′04	6′05	7′06	8′07	9′08	1′09
3′01	4′02	5′03	6′04	7′05	8′06	9′07	1′08	2′09

Les deux derniers systèmes terminent exactement la permutation cyclique de manière qu'il y a là tous les triples possibles avec l'élément 0, un élément simple et un élément prime ; dans les 7 premiers systèmes les autres triples de chaque colonne contiennent 2 éléments primes, dans les deux derniers les mêmes triples contiennent 2 éléments simples. Nous obtenons ainsi $9 = \nu$ systèmes de Steiner de $2\nu + 1$ éléments *différents par tous les triples* ; il est d'ailleurs impossible par le même procédé, même en modifiant le tableau A, d'en obtenir davantage. Si les $\nu - 2$ systèmes Δ_ν existent pour ν éléments, pour $2\nu + 1$ éléments, il existe donc en tout cas ν systèmes de Steiner n'ayant aucun triple commun, c'est-à-dire un nombre supérieur à la moitié du nombre $(2\nu + 1) - 2 = 2\nu - 1$. Probablement la construction correspondante de Reiss ou une autre donnerait, au moyen toujours des $\nu - 2$ systèmes Δ_ν, un résultat pareil pour $2\nu - 5$ éléments ; pour 13 éléments j'ai obtenu 7 systèmes sur 11, pour 15 éléments 8 systèmes sur 13 et pour 31 éléments 16 systèmes sur 29 différents par tous les triples. Presque certainement il existe donc pour chaque $N = 6n + 1$ ou $6n + 3$, en tout cas un nombre de systèmes différents par tous les triples supérieur à la demie du nombre $N - 2$, *excepté pour 7 éléments*, et cela me paraît une raison de croire que 7 éléments est le seul cas pour lequel la question de Cayley manque de solution.

Fribourg (Suisse), septembre 1916.

---

[1] Pour $\nu = 3$ la répartition en $\nu - 2$ systèmes Δ_3 existe, puisqu'elle se réduit au seul triple 123, mais précisément parce qu'elle se réduit à *un* système Δ_3, avec les dispositions :

$$123 \quad \begin{matrix} 0\,1' \\ 2'3' \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0\,2' \\ 1'3' \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0\,3' \\ 1'2' \end{matrix} \qquad\qquad 1'2'3' \quad \begin{matrix} 01 \\ 23 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 02 \\ 13 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 03 \\ 12 \end{matrix}$$

on ne peut former que deux systèmes Δ_7 n'ayant aucun triple commun, et non trois.