

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1917)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** MODULE D'UNE SOMME  
**Autor:** Petrovitch, Michel  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-17316>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# MODULE D'UNE SOMME

PAR

Michel PETROVITCH (Belgrade, Serbie).

---

La proposition élémentaire et intuitive, d'après laquelle le module d'une somme  $\sum u_k$  est au plus égal à la somme de modules des  $u_k$ , est fréquemment utilisée dans des démonstrations et dans des calculs approchés. Les propositions aussi intuitives qui suivent, fournissant à la fois des limites inférieures et supérieures du module d'une somme, pourraient également rendre de pareils services.

I. — Soient

$$u_1 = a_1 + ib_1, \quad u_2 = a_2 + ib_2, \quad u_3 = a_3 + ib_3, \dots$$

plusieurs quantités complexes. On a

$$\text{mod } \sum u_k = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

où P et Q désignent les valeurs absolues de  $\sum a_k$  et  $\sum b_k$ .

L'inégalité et l'identité

$$1 \geq \frac{P^2 + Q^2}{(P + Q)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{P - Q}{P + Q} \right)^2$$

font voir que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{P^2 + Q^2}{(P + Q)^2} \leq 1.$$

Donc: le module d'une somme  $\sum u_k$  a pour valeur  $\theta(P + Q)$ , où P désigne la valeur absolue de la somme de parties réelles des  $u_k$ , Q désigne la valeur absolue de la somme de coeffi-

cients de  $i$  des  $u_k$  et  $\theta$  désigne un facteur dont la valeur est toujours comprise entre  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et 1.

La limite  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  est effectivement atteinte lorsque  $P = Q$  et la limite 1 lorsque les  $u_k$  sont tous réels, ou bien tous imaginaires.

On voit, par exemple, aussi que

$$\log \operatorname{mod} \Sigma u_k = \log (P + Q) - \delta,$$

où  $\delta$  est une quantité positive plus petite que  $\frac{1}{2} \log 2$ . Si le logarithme est vulgaire,  $\delta$  est compris entre 0 et 0,15051... ; s'il est naturel,  $\delta$  est compris entre 0 et 0,34657...

Rappelons que lorsque  $P$  et  $Q$  sont des mêmes signes, la somme  $P + Q$  coïncide avec la valeur absolue du coefficient de  $i$  de l'expression  $(1 + i)\Sigma u_k$ , et que, si  $P$  et  $Q$  sont des signes contraires, cette somme coïncide avec la valeur absolue de la partie réelle de la même expression, comme il résulte de la formule

$$(1 + i)\Sigma u_k = (P - Q) + i(P + Q).$$

II. — Ce qui précède n'assujettit les qualités  $u_k$  à aucune restriction. Supposons maintenant que toutes leurs parties réelles  $a_k$  aient un même signe, aussi que tous les coefficients  $b_k$  de  $i$ , les deux signes pouvant d'ailleurs être quelconques.

En désignant par  $\alpha_k$  la valeur absolue de  $a_k$  et par  $\beta_k$  la valeur absolue de  $b_k$  on aura

$$\operatorname{mod} u_k = \operatorname{mod} (\alpha_k + i\beta_k)$$

et par suite, en vertu de ce qui précède

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_k + \beta_k) \leq \operatorname{mod} u_k \leq \alpha_k + \beta_k.$$

Faisons  $k = 1, 2, 3, \dots$  et ajoutons membre à membre les équations ainsi obtenues. En remarquant que les  $\alpha_k$  étant tous de même signe, ainsi que les  $\beta_k$ , on aura

$$\Sigma \alpha_k = \text{val. abs. de } \Sigma a_k = P, \quad \Sigma \beta_k = \text{val. abs. de } \Sigma b_k = Q;$$

on obtient ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(P + Q) \leq \Sigma \text{ mod } u_k \leq P + Q,$$

ou encore

$$\Sigma \text{ mod } u_k = \lambda (P + Q), \quad (1)$$

avec

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \lambda \leq 1.$$

Le facteur  $\lambda$  atteindra sa valeur  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  limite lorsqu'on a à la fois

$$a_1 = b_1 \quad a_2 = b_2 \quad a_3 = b_3, \dots$$

et la limite 1 lorsque dans chaque paire de quantités  $(a_k, b_k)$  l'une ou l'autre d'elles est nulle.

En comparant l'équation (1) avec l'équation

$$\text{mod } \Sigma u_k = \theta(P + Q), \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \theta \leq 1$$

résultant de ce qui précède, on tire

$$\text{mod } \Sigma u_k = \frac{\theta}{\lambda} \Sigma \text{ mod } u_k.$$

Le rapport  $\frac{\theta}{\lambda}$  atteindra sa plus petite valeur possible lorsqu'on a à la fois  $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\lambda = 1$ ; pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit qu'on ait  $P = Q$  et que, de plus, dans chaque paire de quantités  $(a_k, b_k)$  l'une ou l'autre soit nulle. Le rapport  $\frac{\theta}{\lambda}$  a alors la valeur  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

La plus grande valeur du même rapport est d'ailleurs manifestement 1, car on a toujours

$$\text{mod } \Sigma u_k \leq \Sigma \text{ mod } u_k;$$

cette limite 1 est effectivement atteinte lorsque ou bien tous les  $a_k$  à la fois, ou bien tous les  $b_k$  à la fois sont nuls (et l'on a alors à la fois  $\theta = 1$ ,  $\lambda = 1$ ).

On arrive ainsi à la proposition suivante :

*Lorsque dans une somme  $\sum u_k$  les parties réelles des  $u_k$  sont d'un même signe et qu'en même temps les coefficients de  $i$  dans les  $u_k$  ont tous un même signe, on a*

$$\mod \sum u_k = \mu \sum \mod u_k$$

où  $\mu$  est un facteur dont la valeur est comprise entre  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et 1.

La limite  $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$  est effectivement atteinte lorsque chaque termes  $u_k$  est réel ou purement imaginaire, et que, de plus, la somme de termes  $u_k$  réels et la somme de coefficients de  $i$  des  $u_k$  purement imaginaires sont égales en valeurs absolues. La limite  $\mu = 1$  est atteinte lorsque les termes  $u_k$  sont à la fois tous réels ou bien tous purement imaginaires.

Remarquons que dans le cas considéré (les  $a_k$  et les  $b_k$  des mêmes signes respectifs) la différence entre le logarithme du module d'une somme et le logarithme de la somme de modules est toujours négative et plus petite en valeur absolue que  $\frac{1}{2} \log 2$ .

Genève, janvier 1917.