**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 18 (1916)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR L'ARITHMÉTIQUE DES NOMBRES HYPERCOMPLEXES
**Autor:** DuPasquier, L.-G.
**Kapitel:** III
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-16879

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 09.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

est égale à 2; ce choix une fois fait, les quaternions premiers dont les normes sont les nombres premiers suivants, pris dans l'ordre indiqué, se déterminent de proche en proche, sans ambigüité, jusqu'à la fin. »

Cette singulière exception tombe également quand on passe du domaine $[J_0]$ au domaine holoïde maximal $[J]$.

**24.** — Résumons les considérations précédentes en disant :

Les nombres hypercomplexes « entiers » doivent former non seulement un domaine holoïde, mais un domaine holoïde maximal.

*Définition IX :* Un complexe rationnel

$$x = \sum_{\lambda}^{1\ldots r} x_\lambda e_\lambda$$

sera dit *entier,* s'il est contenu dans le domaine holoïde maximal en question. Le complexe rationnel $x$ sera dit *non entier,* s'il ne fait pas partie du domaine holoïde maximal en question. (Définition *hurwitzienne.*)

Cette définition hurwitzienne du nombre hypercomplexe *entier* peut avoir comme conséquence qu'on appellera « entiers » même certains complexes rationnels $x$ à coordonnées $x_\lambda$ fractionnaires. (Exemple : les quaternions.) Inversement : il peut arriver aussi que certains nombres hypercomplexes rationnels $x$ ne soient pas des complexes « entiers », bien que toutes leurs coordonnées $x_\lambda$ soient des nombres entiers ordinaires.

## III

**25.** — Pour construire l'arithmétique d'un corps $\{R\}$ de nombres hypercomplexes rationnels, il faut toujours commencer par une *opération préliminaire* consistant à partager ce corps $\{R\}$ en deux ensembles, mettant d'un côté : les complexes rationnels « entiers », de l'autre : les complexes rationnels « non entiers ». Or, il peut se présenter la curieuse circonstance que cette opération préliminaire ne soit pas univoque. Nous l'avons découvert en étudiant une classe

très étendue de systèmes de nombres hypercomplexes de la forme

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_s e_s = \sum_{\lambda}^{1 \dots s} a_\lambda e_\lambda$$

caractérisée par le fait que le nombre $s$ des coordonnées $a_\lambda$ est un carré parfait, $s = 1, 4, 9, 16, \dots, \nu^2$. Le cas le plus simple est $s = 4$, vu que $s = 1$ donne les nombres réels ordinaires.

**26.** — Soient donc

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 \quad \text{et} \quad b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4$$

deux de ces nombres hypercomplexes. On définit *l'égalité* de deux complexes par l'égalité des coordonnées correspondantes. Ainsi, pour que $a = b$, il faut et il suffit que les 4 égalités $a_\lambda = b_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, 3, 4$) aient lieu simultanément. On définit ensuite *l'addition* de deux de ces nombres hypercomplexes par l'addition des coordonnées correspondantes; il s'ensuit que son opération inverse : *la soustraction*, est univoque, toujours possible et se fait par la soustraction des coordonnées correspondantes; en formule :

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) e_1 + (a_2 \pm b_2) e_2 + (a_3 \pm b_3) e_3 + (a_4 \pm b_4) e_4 \,. \qquad (10)$$

Pour *multiplier* (ou diviser) un tel nombre hypercomplexe par un nombre *réel* $r$, il faut multiplier (ou diviser) chacune des coordonnées par $r$, d'où la formule :

$$r \,.\, a = r a_1 e_1 + r a_2 e_2 + r a_3 e_3 + r a_4 e_4 \,. \qquad (11)$$

La *multiplication* de ces nombres hypercomplexes *entre eux* est définie par le tableau suivant :

| | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | $e_2$ | 0 | 0 |
| $e_2$ | 0 | 0 | $e_1$ | $e_2$ |
| $e_3$ | $e_3$ | $e_4$ | 0 | 0 |
| $e_4$ | 0 | 0 | $e_3$ | $e_4$ |

(12)

Représentant par $i$ et $k$ l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, on trouve le produit $e_i . e_k$ à l'intersection de la ligne horizontale portant à gauche $e_i$ avec la colonne verticale portant en haut $e_k$.

Un tel nombre hypercomplexe est dit *réel,* lorsque ses deux coordonnées moyennes sont nulles et, de plus, ses deux coordonnées extrêmes égales entre elles. Tout nombre réel $r$ peut ainsi s'écrire : $r = re_1 + re_4 = r(e_1 + e_4)$. On vérifie sans peine que le symbole $e_1 + e_4$ joue le rôle du « nombre 1 », de sorte qu'on peut poser, dans ce système de nombres hypercomplexes : $e_1 + e_4 = 1$. Moyennant ces définitions, on peut dire que l'addition, la soustraction et la multiplication de ces nombres hypercomplexes se font « d'après les règles ordinaires de l'algèbre ». A noter cependant que la multiplication n'est en général pas commutative dans ce système, puisque, par exemple, $e_2 . e_3 = e_1$, tandis que $e_3 . e_2 = e_4$. Il y a donc lieu de distinguer ici, comme pour les quaternions, une « arithnomie à gauche » et une « arithnomie à droite » (v. article 7).

27. — Pour introduire la division comme opération inverse de la multiplication, on peut procéder par analogie avec les nombres complexes de *Gauss* et avec les quaternions. A tout nombre hypercomplexe $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$ correspond son *conjugué* : $A' = a_4 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3 + a_1 e_4$.

Le produit d'un tel nombre hypercomplexe et de son conjugué — ils sont commutables entre eux — est toujours réel et s'appelle « *la norme* du nombre hypercomplexe $a$ ». Cette norme est ainsi définie par

$$N(a) = a . A' = A' . a = a_1 a_4 - a_2 a_3 \ . \qquad (13)$$

On en déduit le théorème fondamental que la norme d'un produit est égale au produit des normes des facteurs : $N(a . b) = N(a) . N(b)$.

La norme d'un tel complexe $a$ peut être nulle sans que $a = 0$ ; si $N(a) = 0$, on dit que $a$ est « un diviseur de zéro ». Ce système de nombres hypercomplexes présente donc, d'avec les nombres complexes de *Gauss* et les quaternions, cette différence capitale qu'un produit de facteurs peut être

nul sans qu'aucun des facteurs de ce produit ne soit nul. Ainsi, $e_3 . e_4 = 0$; $e_4 . e_1 = 0$; $e_2^2 = 0$; etc.

Si $a$ n'est pas diviseur de zéro, c'est-à-dire si $N(a) \neq 0$, on entend, en analogie avec les nombres complexes ordinaires et avec les quaternions, par « l'*inverse* de $a$ » le nombre hypercomplexe

$$a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{A'}{N(a)} \tag{14}$$

qui satisfait aux relations $a . a^{-1} = a^{-1} . a = 1$.

Les nombres hypercomplexes $a$ et $b$ étant donnés, avec $N(b) \neq 0$, on appellera, en analogie avec les quaternions, le nombre hypercomplexe $x = b^{-1} . a$ « le quotient *à droite* de $a$ par $b$ »; c'est la solution de l'équation $a = b . x$; et le nombre hypercomplexe $y = a . b^{-1}$ sera « le quotient *à gauche* de $a$ par $b$ »; c'est la solution de l'équation $a = y . b$. Le signe ordinaire de la division, $a : b$ ou $\frac{a}{b}$, n'aura de sens, à moins de définitions spéciales, que si $a$ et $B'$ sont commutables entre eux, $B'$ représentant le conjugué de $b$.

Dans le domaine de ces nombres hypercomplexes, chacune des deux divisions est donc toujours possible et univoque, à condition que la norme du diviseur ne soit pas nulle. Un quotient dont le diviseur est de norme nulle n'a de sens que si le dividende est aussi de norme nulle, et un quotient de deux diviseurs de zéro, quand il a un sens, peut être indéterminé.

Les définitions précédentes suffisent pour établir parfaitement les quatre opérations rationnelles dans le domaine de ces nombres hypercomplexes.

**28.** — Ces nombres hypercomplexes peuvent se représenter par des schémas carrés où ne figurent que les coordonnées. Ainsi,

$$a = \begin{Bmatrix} a_1, & a_2 \\ a_3, & a_4 \end{Bmatrix}; \qquad b = \begin{Bmatrix} b_1, & b_2 \\ b_3, & b_4 \end{Bmatrix}.$$

L'égalité $a = b$, la somme $a + b$, la différence $a - b$, se figurent alors aisément, et l'on obtient pour le produit $a . b$:

$$a . b = \begin{Bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3, & a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3, & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{Bmatrix}.$$

On voit par là, soit dit en passant, que la multiplication de ces nombres entre eux se fait d'après les mêmes règles que la composition des substitutions linéaires. A chacun de ces complexes correspond une substitution linéaire bien déterminée, et inversement. Le « nombre 1 » correspond à la substitution identique : $1 = \begin{Bmatrix} 1 ; 0 \\ 0 ; 1 \end{Bmatrix}$; un nombre réel $r$ à $\begin{Bmatrix} r ; 0 \\ 0 ; r \end{Bmatrix}$; les unités relatives sont :

$$e_1 = \begin{Bmatrix} 1 ; 0 \\ 0 ; 0 \end{Bmatrix}, \quad e_2 = \begin{Bmatrix} 0 ; 1 \\ 0 ; 0 \end{Bmatrix}, \quad e_3 = \begin{Bmatrix} 0 ; 0 \\ 1 ; 0 \end{Bmatrix}, \quad e_4 = \begin{Bmatrix} 0 ; 0 \\ 0 ; 1 \end{Bmatrix};$$

et ainsi de suite. Chaque propriété des substitutions linéaires peut se traduire en un théorème sur ces nombres hypercomplexes.

**29.** — Cette correspondance étroite montre aussi la voie de la généralisation au cas où le nombre $s$ des coordonnées est un carré supérieur à 4, $s = 9, 16, \ldots, \nu^2$. Par exemple, pour ces nombres hypercomplexes à 9 coordonnées indépendantes, on aura

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + \ldots + a_9 e_9 = \sum_{\lambda}^{1\ldots 9} a_\lambda e_\lambda ,$$

nombre hypercomplexe qu'on représentera schématiquement par

$$a = \begin{Bmatrix} a_1 , & a_2 , & a_3 \\ a_4 , & a_5 , & a_6 \\ a_7 , & a_8 , & a_9 \end{Bmatrix} .$$

Or, il est plus pratique de se servir de deux indices et d'écrire, pour le même nombre hypercomplexe $a$,

$$a = \sum_{i,k}^{1,2,3} a_{ik} e_{ik} = \begin{Bmatrix} a_{11} , & a_{12} , & a_{13} \\ a_{21} , & a_{22} , & a_{23} \\ a_{31} , & a_{32} , & a_{33} \end{Bmatrix} .$$

L'unité relative $e_{ik}$ est représentée par le schéma carré dont tous les éléments sont nuls sauf celui qui se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne, lequel est 1.

La multiplication des unités relatives $e_{ik}$ est alors définie par les relations :

$$e_{ik} \cdot e_{ks} = e_{is} \; ; \qquad e_{ik} \cdot e_{ts} = 0 \qquad \text{pour} \qquad t \neq k \tag{15}$$

Les lettres $i$, $k$, $s$, $t$ représentent, chacune, l'un quelconque des nombres 1, 2, 3.

Si

$$b = \sum_{i,k} b_{ik}\, e_{ik} = \begin{Bmatrix} b_{11}\,, & b_{12}\,, & b_{13} \\ b_{21}\,, & b_{22}\,, & b_{23} \\ b_{31}\,, & b_{32}\,, & b_{33} \end{Bmatrix}$$

représente un second nombre hypercomplexe du même système, l'*égalité*, l'*addition* et la *soustraction* se définiront par l'égalité, l'addition et la soustraction des coordonnées correspondantes, et le produit $a.b$ sera défini par

$$a.b = c = \sum_{i,k} c_{ik}\, e_{ik} = \begin{Bmatrix} c_{11}\,, & c_{12}\,, & c_{13} \\ c_{21}\,, & c_{22}\,, & c_{23} \\ c_{31}\,, & c_{32}\,, & c_{33} \end{Bmatrix}$$

où l'on a posé pour abréger :

$$c_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{13}\, b_{31} = \sum_{\lambda}^{1,2,3} a_{1\lambda}\, b_{\lambda 1}$$

$$c_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} + a_{13}\, b_{32} = \sum_{\lambda} a_{1\lambda}\, b_{\lambda 2}$$

. . . . . .

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + a_{i3}\, b_{3k} = \sum_{\lambda}^{1,2,3} a_{i\lambda}\, b_{\lambda k} \tag{16}$$

. . . . . .

On appellera *réel* un tel nombre hypercomplexe $r$ quand il aura la forme

$$r = \begin{Bmatrix} r\,, & 0\,, & 0 \\ 0\,, & r\,, & 0 \\ 0\,, & 0\,, & r \end{Bmatrix}$$

en particulier, le « nombre 1 » sera

$$1 = e_1 + e_5 + e_9 = \sum_{\lambda}^{1,2,3} e_{\lambda\lambda} = \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix}.$$

En se basant sur les propriétés bien connues des substitutions linéaires, on définira d'abord « le *conjugué* A′ d'un tel nombre hypercomplexe $a$ » ; ce sera

$$A' = \begin{Bmatrix} A_{11}, & -A_{21}, & A_{31} \\ -A_{12}, & A_{22}, & -A_{32} \\ A_{13}, & -A_{23}, & A_{33} \end{Bmatrix}$$

où $A_{ik}$ désigne le sous-déterminant correspondant à $a_{ik}$ ; puis « la *norme*, $N(a)$, de ce complexe $a$ » en posant : $N(a) = a.A' = A'.a$ ; cette norme est toujours un nombre réel et égal au déterminant du système des coordonnées :

$$N(a) = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix};$$

puis « l'*inverse* d'un complexe $a$ de norme non nulle » en posant l'équation de définition (14) ; enfin, un « quotient à gauche » et un « quotient à droite » du complexe $a$ par le complexe $b$, où l'on suppose $N(b) \neq 0$, comme ci-dessus, articles 7 et 27.

Une induction, facile pour qui connaît les substitutions linéaires, montre comment procéder dans le cas où le nombre $s$ des coordonnées indépendantes est un carré supérieur à 9, $s = 16, 25, \ldots, \nu^2$.

**30.** — Remarquons que toutes ces définitions peuvent subsister même dans le cas où les coordonnées du nombre hypercomplexe en question sont elles-mêmes des nombres complexes de *Gauss* ; alors, en posant comme de coutume $i = \sqrt{-1}$, on a affaire (dans le cas de 4 unités relatives, $s = 4$) à un complexe tel que

$$(a_1 + ib_1)\, e_1 + (a_2 + ib_2)\, e_2 + (a_3 + ib_3)\, e_3 + (a_4 + ib_4)\, e_4 .$$

On voit combien il peut devenir fastidieux, quand on s'occupe de pareils complexes, de distinguer entre les deux espèces différentes de complexes, car il est nécessaire d'éviter soigneusement toute confusion entre : d'une part les coordonnées qui sont des complexes de *Gauss,* et d'autre part le complexe total constitué par l'ensemble de ces coordonnées. Afin de simplifier la terminologie et de prévenir des confusions possibles, nous avons introduit le néologisme de *tettarions* pour désigner cette espèce de nombres hypercomplexes. Ce terme de *tettarion* est tiré d'un mot grec qui signifie *carré* et doit indiquer que le complexe en question peut se représenter par un schéma carré. Suivant que le nombre des lignes et des colonnes est 2, 3, 4, ... , donc le nombre correspondant des coordonnées $s = 4, 9, 16, \ldots$ , nous parlons de *duotettarions, tritettarions, tétratettarions,* ..., en général de $\nu$-tettarions ou polytettarions.

Les *duotettarions* sont donc les nombres hypercomplexes définis dans les articles 26-28 ; les *tritettarions* ceux traités à l'article 29 ; etc.

Dans la suite, nous ne parlerons que des duotettarions ; nous pourrons ainsi les désigner par « tettarions » tout court. De plus, nous envisagerons exclusivement des duotettarions *rationnels,* et le corps $\{R\}$ constitué par leur ensemble (v. article 14).

**31.** — Après cette digression sur les tettarions en général, proposons-nous de construire l'arithnomie du corps $\{R\}$ formé par tous les duotettarions rationnels. Le premier pas devra consister à définir le tettarion « entier ». A cet effet, il s'agit de trouver le domaine holoïde maximal contenu dans ce corps de nombres $\{R\}$ (v. les définitions VI et VII).

Pour bien faire ressortir le fait nouveau qui se produit ici, nous allons procéder par analogie.

Répétons que nous adoptons toujours la définition *hurwitzienne* du nombre entier (v. définition IX).

Dans le corps des nombres ordinaires comprenant l'ensemble de tous les nombres rationnels, il existe un seul domaine holoïde ; il est, par conséquent, maximal : c'est l'ensemble des nombres entiers ; nous le désignons par [1].

Pour savoir si un nombre rationnel pris au hasard est entier ou non entier, il suffit de déterminer s'il fait partie du domaine [1], ou non. Aucune ambigüité n'est possible, puisqu'il existe un seul domaine holoïde, donc aussi une seule façon de séparer les nombres rationnels en « entiers » et « fractionnaires ».

32. — Envisageons, en second lieu, les nombres complexes ordinaires, ou complexes de *Gauss*, $a_0 + a_1 i$. Dans le corps de nombres constitué par l'ensemble des complexes rationnels de *Gauss*, il y a une infinité de domaines holoïdes difrents ; leur *base* est : $(1, pi)$, où $p$ est un nombre entier arbitrairement choisi, mais fixe. Parmi tous ces domaines holoïdes, *un seul est maximal ;* c'est précisément celui dont *Gauss* et plus tard M. *Lipschitz* ont fait l'arithnomie, à savoir le domaine $[1, i]$ = ensemble de tous les $m_1 + m_2 i$, où $m_1$ et $m_2$ sont des entiers ordinaires.

Si l'on prend au hasard un nombre complexe $\alpha + \beta i$ rationnel quelconque, on pourra dire immédiatement et sans équivoque, si ce complexe rationnel est « entier » ou « non entier » ; il suffira de déterminer s'il est contenu, ou non, dans ce domaine $[1 ; i]$. Ici aussi, aucune ambigüité n'est possible, parcequ'il existe un seul domaine holoïde maximal ; en d'autres termes : il n'y a qu'une façon de séparer les nombres complexes rationnels de *Gauss* en complexes « entiers » et complexes « non entiers ». A la question : « Le complexe rationnel $\alpha + \beta i$ est-il entier ? » on répondra d'une manière absolue, soit par oui, soit par non ; aucune autre alternative n'est possible.

33. — Envisageons, en troisième lieu, les quaternions. Le corps des quaternions rationnels (v. définition II) contient une multiple infinité de domaines holoïdes différents. Mais de tous ces domaines holoïdes contenant les unités relatives $i_1$, $i_2$, $i_3$, *un seul est maximal ;* c'est le domaine [J] découvert par M. *Hurwitz* (v. article 19). Choisissant arbitrairement un quaternion rationnel $\varkappa$, on pourra décider sans équivoque et d'une manière absolue, si $\varkappa$ est « entier » ou « non entier » ; il suffira de déterminer s'il fait partie de ce domaine [J], ou non. Ici encore, aucune ambigüité n'est possible,

parcequ'il existe *un seul* domaine holoïde maximal, et partant une seule façon de séparer les quaternions rationnels en « entiers » et « non entiers ». A la question : « le quaternion rationnel $\varkappa$ est-il entier ? » on répondra également d'une manière absolue, soit par oui, soit par non ; aucune autre alternative ne sera possible.

**34.** — En quatrième lieu, envisageons les tettarions et examinons le corps $\{T\}$ des tettarions rationnels. Il s'agit de séparer ce corps $\{T\}$ en deux ensembles, mettant dans le premier : les tettarions « entiers » encore à définir, dans le second : les tettarions « non entiers ». D'après ce qui précède, cela revient à chercher quel est le domaine holoïde *maximal* du corps $\{T\}$. Or, voici le fait nouveau qui se produit ici : *Parmi tous les domaines holoïdes que contient le corps* $\{T\}$, *une infinité sont maximaux, quoique très différents entre eux.* Nous avons, en effet, démontré ailleurs le théorème suivant :

Le domaine holoïde maximal le plus général contenu dans le corps $\{T\}$ des tettarions rationnels possède la base que voici :

$$t_1 = \begin{Bmatrix} g_3 - \frac{g_1 g_2}{g}, & \frac{c\varepsilon}{dg} \\ \frac{\varepsilon' d g_2}{cg}, & \frac{g_1 g_2}{g} \end{Bmatrix}; \quad t_2 = \begin{Bmatrix} 0, & 0 \\ \frac{\varepsilon' d}{c}, & g_1 \end{Bmatrix}; \quad t_3 = \begin{Bmatrix} 1; & 0 \\ 0; & 1 \end{Bmatrix}; \quad t_4 = \begin{Bmatrix} g, & 0 \\ 0, & 0 \end{Bmatrix}$$

où $\varepsilon = \pm 1$ ; $\varepsilon' = \pm 1$ ; $c$, $d$, $g$, $g_1$, $g_2$, $g_3$ représentant des nombres entiers arbitrairement choisis, mais fixes, et assujettis aux conditions :

$$c \neq 0 , \quad d \neq 0 , \quad g \neq 0 , \quad g(g_1 g_3 + g g_4) - g_1^2 g_2 = \varepsilon\varepsilon' ,$$

où $g_4$ est un nombre entier quelconque.

On obtient donc un domaine holoïde *maximal* en faisant parcourir, dans l'expression

$$m_1 t_1 + m_2 t_2 + m_3 t_3 + m_4 t_4 ,$$

aux 4 nombres $m_\lambda$ et indépendamment les uns les autres, la série des nombres entiers ordinaires, de $-\infty$ à $+\infty$, après

avoir fixé, conformément aux conditions ci-dessus, mais d'ailleurs arbitrairement, les entiers $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $c$, $d$, $g$, $g_1$, $g_2$, $g_3$ et $g_4$.

**35.** — Parmi ces domaines holoïdes maximaux se trouve, par exemple, le domaine $\left[e_1, \frac{e_2}{p}, pe_3, e_4\right]$, où $p$ est un nombre entier non nul, du reste arbitrairement choisi, mais fixe. Ce domaine holoïde maximal que nous désignons par $[J_p]$ est donc constitué par l'ensemble des tettarions

$$m_1 e_1 + \frac{m_2}{p} e_2 + pm_3 e_3 + m_4 e_4 . \tag{17}$$

Il contient une infinité de tettarions à coordonnées entières : il suffit d'y choisir pour $m_2$ un multiple de $p$ ; mais il ne contient pas *tous* les tettarions à coordonnées entières ; ainsi, ni $e_3$, ni $2e_3$, ni $3e_3$, ..., ni $(p-1)e_3$, ni une infinité d'autres, n'en font partie. Par contre, $[J_p]$ contient certains tettarions à coordonnées fractionnaires, par exemple

$$\frac{e_2}{p}, \frac{2e_2}{p}, \frac{3e_2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p} e_2 ,$$

et une infinité d'autres.

Citons encore le domaine holoïde maximal $[H_2]$ formé par l'ensemble des tettarions

$$\left(m_1 - \frac{m_2}{2}\right) e_1 + \frac{m_2}{2} e_2 + \left(m_3 - \frac{m_2}{2}\right) e_3 + \left(m_1 - m_3 + 2m_4 + \frac{m_2}{2}\right) e_4 \tag{18}$$

où les $m_\lambda$ représentent, comme toujours, des nombres entiers quelconques. Ce domaine $[H_2]$, quoique comprenant (outre des tettarions à coordonnées fractionnaires) une infinité de tettarions à coordonnées entières, ne les contient cependant pas tous ; par exemple, il ne contient pas $e_1$ ; par contre, ce même tettarion $e_1$ fait partie de chacun des domaines $[J_p]$, quel que soit $p$.

Chacun des domaines holoïdes $[J_p]$ est cependant maximal ; en d'autres termes : il n'existe pas, dans le corps de tettarions $\{T\}$, un autre domaine holoïde contenant tous les éléments de $[J_p]$ plus encore d'autres non compris dans $[J_p]$. Et il en est

de même pour tous les autres domaines holoïdes maximaux. Chacun d'eux constitue un ensemble de « nombres entiers » avec toutes leurs propriétés caractéristiques ; c'est dire qu'on peut ériger, dans chacun de ces domaines holoïdes maximaux, une arithmétique en tous points semblable à l'arithmétique *hurwitzienne* des quaternions entiers.

**36.** — Si l'on fait l'arithnomie du domaine $[H_2]$ par exemple, tous les tettarions contenus dans $[H_2]$ seront réputés « tettarions entiers », et tous les autres, donc aussi $e_1$, seront considérés comme tettarions « non entiers ». Par contre, si l'on fait l'arithnomie d'un domaine $[J_p]$, ce seront tous les tettarions faisant partie de $[J_p]$, donc aussi $e_1$, qui seront réputés « entiers », à l'exclusion de tous les autres. Ainsi, le tettarion $e_1$ qui est pourtant à coordonnées entières devra être envisagé soit comme « nombre entier », soit comme « nombre non entier », suivant le domaine holoïde considéré. On ne peut donc pas, quand on s'occupe de l'arithnomie des tettarions, appliquer purement et simplement la définition IX du tettarion entier en disant : « un tettarion rationnel

$$t = \sum_{\lambda} t_\lambda e_\lambda$$

sera *entier*, s'il fait partie d'un domaine holoïde maximal » ; on est obligé d'ajouter : « entier *par rapport* au domaine $[J_p]$ », ou bien : « entier *par rapport* au domaine $[H_2$ »], etc.

**37.** — Prenez maintenant au hasard un tettarion rationnel $t$ et posez la question : « est-il entier ? » On ne pourra plus vous répondre, en général, d'une manière absolue, soit par oui, soit par non. Il pourra se faire, au contraire, qu'on doive répondre « cela dépend », car il y a plusieurs façons de séparer le corps des tettarions rationnels en « entiers » et « non entiers » ; il y a même une infinité de manières d'opérer cette séparation, et la réponse à la question ci-dessus doit dépendre, ou du moins *peut* dépendre, de la façon dont on a départagé le corps des tettarions rationnels en *entiers* et *non entiers*.

**38.** — Certains tettarions rationnels sont contenus dans

*tous* les domaines holoïdes maximaux ; tels les nombres entiers ordinaires envisagés comme tettarions réels ; ceux-là sont donc toujours et sûrement des tettarions *entiers ;* on pourrait les nommer « absolument entiers ». D'autres tettarions rationnels ne sont contenus dans *aucun* domaine holoïde maximal ; ceux-là sont donc toujours des tettarions *non entiers ;* on pourrait les dénommer « absolument non entiers » ou « absolument fractionnaires ». Enfin, il y a une catégorie de tettarions rationnels contenus dans tel domaine holoïde maximal $[J_p]$, mais pas dans les autres ; ceux-là peuvent être tantôt *entiers,* tantôt *non entiers,* suivant la manière dont on sépare en deux le corps des tettarions rationnels. On pourrait nommer « conditionnellement entiers » les tettarions de cette troisième catégorie.

Au point de vue de l'arithnomie, le corps des nombres rationnels ordinaires et celui des complexes rationnels de *Gauss* se partagent, chacun, en deux groupes seulement, dont l'un contient tous les « nombres entiers » et l'autre tous les « nombres non entiers ». Par contre, le corps des tettarions rationnels devrait plutôt se partager en trois groupes : celui des nombres « absolument entiers », celui des nombres « absolument fractionnaires », et enfin celui des nombres « conditionnellement entiers ».

**39.** — Parmi les domaines holoïdes maximaux du corps $\{T\}$ des tettarions rationnels se trouve le domaine $[J_1]$ constitué par l'ensemble des tettarions à coordonnées entières :

$$[J_1] = \text{ensemble de tous les } m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4 ,$$

où les $m_\lambda$ représentent des nombres entiers ordinaires d'ailleurs quelconques. En appliquant la définition *lipschitzienne* au cas des duotettarions, c'est-à-dire en posant la

*Définition X :* Un duotettarion $t$ sera dit « entier », si ses quatre coordonnées $t_\lambda$ sont toutes des nombres entiers ordinaires, en posant cette définition, dis-je, on obtient un domaine holoïde maximal. Il s'en suit que l'arithnomie basée sur cette définition X est « régulière », semblable en tous points à la théorie *hurwitzienne* des quaternions entiers,

nous voulons dire : exempte de ces exceptions singulières que présente la théorie *lipschitzienne* des quaternions entiers.

L'exemple des duotettarions prouve donc que les nombres complexes de *Gauss* ne constituent pas le seul système de nombres complexes où la définition *lipschitzienne* du complexe *entier* soit satisfaisante (v. définition V).

Celui qui poserait un peu au hasard et sans en connaître la raison profonde, en se laissant guider par l'induction ou par l'analogie avec les nombres complexes ordinaires, cette définition X du tettarion *entier*, simplement parce qu'elle se présente le plus naturellement à l'esprit, celui-là aurait de la chance, en ce sens que le domaine holoïde ainsi délimité est *maximal*, car bien souvent (l'exemple des quaternions, entre autres, le prouve), la définition *lipschitzienne* du complexe entier (v. définition V) engendre des domaines holoïdes non maximaux et partant, une arithnomie « non régulière ».

Mais en posant la définition X simplement par induction et pour des raisons d'analogie, sans en approfondir le pourquoi, et l'arithnomie basée sur cette définition X étant *par hasard* « régulière », c'est-à-dire exempte de ces exceptions singulières qui donnent à réfléchir, on ne s'apercevrait pas de ce qu'il y a d'intéressant dans le cas des tettarions, de ce qui les distingue d'autres systèmes de nombres hypercomplexes, à savoir : que cette définition X n'est pas la seule possible, puisqu'on peut séparer les tettarions rationnels de plusieurs manières, même d'une infinité de manières, en tettarions *entiers* et *non entiers*.

Exprimons cette différence en disant que, pour obtenir une arithmétique « régulière »

1° dans le système des nombres complexes de *Gauss, on doit* se baser sur la définition *lipschitzienne ;* c'est la seule satisfaisante,

2° dans le système des tettarions, *on peut* se baser sur la définition *lipschitzienne ;* mais ce n'est pas la seule qui y soit satisfaisante ;

3° dans le système des quaternions, *il ne faut pas* se baser sur la définition *lipschitzienne ;* elle n'y est pas satisfaisante.

Résumant les considérations précédentes, nous dirons : il existe des systèmes de nombres hypercomplexes où l'on peut procéder de plusieurs façons pour séparer le corps des complexes rationnels en « nombres entiers » et « nombres non entiers ».

## IV

**40.** — Dans les chapitres précédents, nous avons reconnu que définir le complexe « entier » de façon satisfaisante revient à déterminer le domaine holoïde maximal (éventuellement, s'il y en a plusieurs, les domaines holoïdes maximaux) du corps de nombres $\{R\}$ constitué par l'ensemble des éléments

$$x = \sum_{\lambda}^{1\ldots n} x_\lambda e_\lambda$$

où toutes les coordonnées $x_\lambda$ sont des nombres rationnels arbitraires. On pourrait se demander si, étant donné un système quelconque de nombres hypercomplexes, on peut toujours séparer ainsi le corps $\{R\}$ des complexes rationnels en deux groupes, l'un comprenant tous les complexes entiers, l'autre tous les complexes non entiers.

De prime abord, on ne posera guère cette question ; on est porté tout naturellement à croire qu'on peut toujours procéder de façon satisfaisante à cette distinction essentielle entre complexes entiers et non entiers, peut-être d'une seule manière, comme pour les nombres complexes de *Gauss*, peut-être de plusieurs manières, comme pour les tettarions ; mais en tout cas, si on se laisse guider uniquement par l'analogie, on admettra implicitement et *a priori* que cela est toujours possible. Or, il n'en est rien. D'une manière plus précise : les recherches aboutissent au résultat surprenant exprimé par le théorème que voici : *Il existe des corps de nombres hypercomplexes rationnels contenant une infinité de domaines holoïdes, mais parmi lesquels* aucun *n'est maximal.*